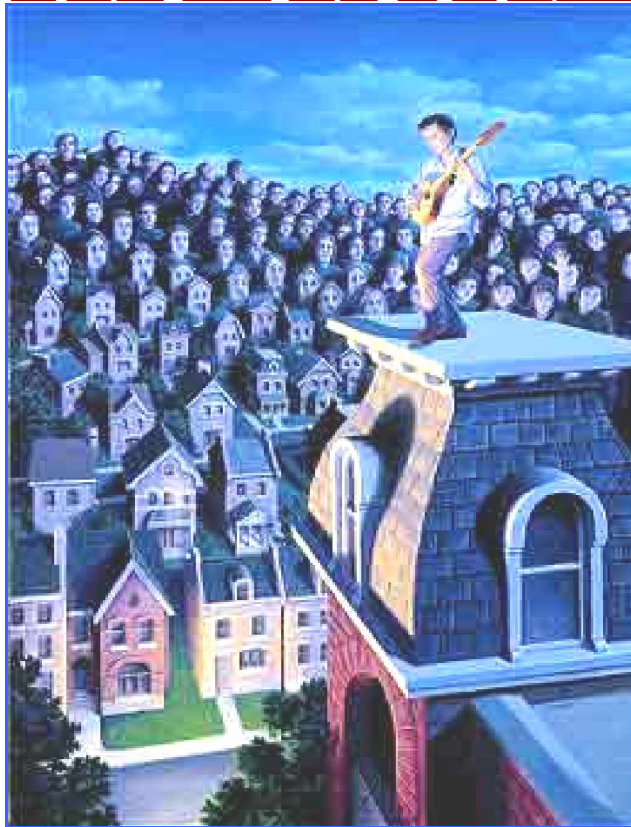




ΣΕΛΑΣ ΕΠΕ - ΤΜΗΜΑ ΠΑΡΟΧΗΣ ΨΥΧΙΑΤΡΙΚΩΝ ΥΠΗΡΕΣΙΩΝ
ΨΥΧΙΑΤΡΟΣ : ΘΕΟΔΩΡΟΣ Π. ΔΑΣΚΑΛΟΠΟΥΛΟΣ
Λ. ΒΑΣ. ΣΟΦΙΑΣ 122, ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ. 210-7712111
Web Site: <http://psi-gr.tripod.com>
Email : goselas@hotmail.com



ΟΙ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ ΠΛΑΝΗΣ



Έκδοση: 0.6a



Το περιεχόμενο αυτού του κειμένου είναι τμήμα κεφαλαίων του βιβλίου :

«ΟΙ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ ΠΛΑΝΗΣ»

Το Copyright και τα Πνευματικά Δικαιώματα αυτού του εντύπου όπως και ολόκληρου του βιβλίου «**ΟΙ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ ΠΛΑΝΗΣ**» έχει ο Θεόδωρος Π. Δασκαλόπουλος, και η εταιρία ΣΕΛΑΣ ΕΠΕ - 2006.

Επιτρέπεται η αναδημοσίευση τμήματος ή ολόκληρου, σε οποιοδήποτε ηλεκτρονικό ή έντυπο μέσο, μόνο ύστερα από τη γραπτή άδεια του συγγραφέα. Δεν επιτρέπεται τροποποίηση ή παραποίηση ή ιδιοποίηση ή πώληση τού κειμένου. Αν έχετε αμφιβολίες για τους όρους χρήσης επικοινωνήστε μαζί μας.

Αθήνα,
Οκτώβριος 2006

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	3
ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	4
Οδηγίες ανάγνωσης του παρόντος βιβλίου	6
A. Τι υπάρχει πραγματικά εκεί έξω;.....	7
A.1 Πλάνες των αισθήσεων.....	7
A.1.1. Η ακοή.....	7
A.1.2. Η όραση.....	9
A.1.2.1 Οφθαλμαπάτες.....	10
A.1.2.2 Η όραση του γραπτού λόγου.....	12
A.1.2.3 Χρώματα και γραπτός λόγος: Σκλάβος μου για πάντα!	15
A.1.2.4 Γραπτός λόγος και εικόνες από γράμματα	15
A.2 Εγγενείς αδυναμίες του ανθρώπινου εγκέφαλου.....	17
A.2.1. Η εκθετική αδυναμία.....	17
A.2.1.1 Το σιτάρι και το σκάκι.....	17
A.2.1.2 Η σύμπτωση των γενεθλίων.....	18
A.2.1.3 Η σύμπτωση με τον συμπατριώτη.....	21
A.2.1.4 Η σύμπτωση με τα ίδια μυθιστορήματα.....	22
A.2.1.5 Οι συμπτώσεις συνεχίζονται.....	23
A.2.2 Η αδυναμία με τις πιθανότητες.....	24
A.2.2.1 Το παράδοξο με τις γεννήσεις αγοριών –κοριτσιών.....	24
A.2.2.2 Το παράδοξο με το στρίψιμο του νομίσματος.....	25
A.2.3 Η δυσκολία αντίληψης του αριθμού π (3,14159...).....	27
A.2.3.1 Το τύλιγμα της γης.....	27
A.2.3.2 Ο μυστηριώδης αριθμός π.....	28
A.2.4 Η δυσκολία αντίληψης του απείρου.....	28
A.2.5 Η δυσκολία αντίληψης του μηδέν.....	28
A.2.6 Τα αινιγματικά φαινόμενα déjà vu, déjà vécu, déjà senti κλπ.....	28
A.2.7 Η ψυχιατρική εξήγηση των «μεταφυσικών» φαινομένων.....	28
A.2.8 Σοφιστείες και Γκοντελιανά παράδοξα : Συνέπεια ή Πληρότητα;.....	29
A.3 Συλλογικές πλάνες στο πολιτιστικό επίπεδο.....	46
B. Η μεθοδολογία της ανάλυσης.....	47
B.1. Θεωρία Αναλυτικής διαδικασίας.....	47
B.2.1 Παραδείγματα Ανάλυσης Παρατηρητικότητας: Μια πολυθρόνα που μιλάει.....	47
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1.....	52
1.1 Οφθαλμαπάτες: Μαθηματικές και Γεωμετρικές.....	52
1.2 Οφθαλμαπάτες: Αδύνατα σχήματα.....	56
1.3 Οφθαλμαπάτες: Διφορούμενες εικόνες.....	60
1.4 Οφθαλμαπάτες: Μετεικάσματα και ψευδό-κινήσεις.....	64
1.5 Οφθαλμαπάτες: Σχήματα που Περιστρέφονται ή Κυματίζουν.....	67
1.6 Οφθαλμαπάτες: Στερεογράμματα.....	68
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2.....	71
2.1 ΤΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ !.....	71
2.2 ΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ.....	72
2.3 ΤΟ ΣΙΤΑΡΙ ΚΑΙ ΤΟ ΣΚΑΚΙ.....	73
2.4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΤΩΣΗΣ ΤΩΝ ΓΕΝΕΘΛΙΩΝ.....	74
2.5 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΚΑΤΑΓΩΓΗΣ.....	76
2.6 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΤΩΣΗΣ ΤΩΝ ΙΔΙΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ.....	77
2.7 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΝΝΗΣΗΣ ΤΩΝ ΦΥΛΩΝ !.....	78
2.8 ΤΟ ΣΤΡΙΨΙΜΟ ΤΟΥ ΝΟΜΙΣΜΑΤΟΣ !.....	79

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Συμβαίνει αραιά και πού, να έχουμε τη χαρά να δούμε έναν άνθρωπο, να παρατηρεί και να κατανοεί σε βάθος, τον έξω κόσμο. Ακόμα πιο σπάνια θα εντοπίσουμε κάποιον, που να προσπαθεί να αναλύσει και να κατανοήσει αυτά που παρατηρεί. Φαίνεται πως οι περισσότεροι άνθρωποι, δεν γνωρίζουν τη μέθοδο για να διαβάζουν πίσω από τα πράγματα, να παίρνουν τα μηνύματα που αυτά μπορούν να μας δώσουν. Πολύ απλά, δεν αντιλαμβάνονται παρά μόνο τα απολύτως απαραίτητα, για να επιβιώσουν. Και γιατί άλλωστε να παρατηρούν προσεκτικά τον κόσμο; Συνήθως κανείς δεν μας λέει στη ζωή, ότι τα πράγματα που αντιλαμβανόμαστε, μπορεί να μην είναι ακριβώς έτσι, ή μπορεί να μην είναι μόνον έτσι. Υπάρχει βέβαια η γνωστή φράση ότι *τα φαινόμενα απατούν*, αλλά ποιος της δίνει σημασία; Όμως έτσι χάνουμε όλη τη δύναμη, που θα μπορούσαμε να είχαμε. Γιατί η ακρίβεια στην παρατήρηση, σε συνδυασμό με την μεθοδική ανάλυση, μας οδηγούν σε εκπληκτικά συμπεράσματα. Και όπως θα γνωρίζετε, η γνώση είναι δύναμη. Δύναμη να λύσουμε προβλήματα, να βελτιώσουμε τη ζωή μας, αλλά και τη ζωή των άλλων.

Γιατί να μην παρατηρούν, οι άνθρωποι τον κόσμο; Γιατί δεν αναλύουν σωστά, τα όσα υπάρχουν γύρω τους ή όσα τους συμβαίνουν; Τούτο το ερώτημα απασχολεί έντονα, όσους από μας είμαστε επιφορτισμένοι με το καθήκον, να δίνουμε λύσεις στα ψυχικά νοσήματα. Στη διάρκεια της πολυετούς μας πλέον, άσκησης της Ψυχιατρικής, καθημερινά παρατηρούμε τον δυσάρεστο απόηχο του ανθρώπινου λάθους. Αυτό που διδαχθήκαμε στα πανεπιστήμια και στα νοσοκομεία, ήταν μόνο οι τεχνικές γνώσεις για τη σωστή διάγνωση και θεραπεία. Αυτό που είδαμε στην πράξη όμως, είναι πολύ ευρύτερο. Οι άνθρωποι θα πάρουν την αγωγή τους, θα νοιώσουν καλύτερα, άλλος περισσότερο άλλος λιγότερο, αλλά όλοι θα ξαναγυρίσουν πίσω στα ίδια καθημερινά λάθη που έκαναν και στο παρελθόν. Εκτός και αν η ψυχοθεραπεία μπορέσει να τους αλλάξει. Τι πρέπει να αλλάξει; Μα ο τρόπος που βλέπουν τον κόσμο. Πρέπει να τους προσφέρουμε έναν διαφορετικό τρόπο αντίληψης. Η ψυχοθεραπευτική προσπάθεια, συναντάει πολύ συχνά την έννοια της εκπαίδευσης. Σε τέτοιο βαθμό που είναι απαραίτητο να δράσουμε. Να βάλουμε τα πράγματα σε άλλη διάσταση. Να δείξουμε άλλους δρόμους, κρυμμένους από τη θέση που βρίσκεται ο ασθενής. Δρόμους που θα δει και θα βαδίσει αν το επιλέξει, όποιος κατανοήσει την αξία των πολλαπλών επίπεδων αντίληψης. Αν θέλουμε να τον απεγκλωβίσουμε, πρέπει να μάθουμε τους ανθρώπους να γυρίζουν τις έννοιες των πραγμάτων, όπως ο ζογκλέρ τις μπάλες, στον αέρα. Αυτό δεν είναι τόσο απλό όσο ακούγεται.

Όστούσο είναι εφικτό να ανοίξουμε το δρόμο μας, ακόμα και εκεί που μοιάζει να είναι τελείως κλειστός. Φτάνει να εντοπίσουμε τη μικρή χαραμάδα απ' όπου περνάει το φως. **Η προσεκτική συλλογή στοιχείων και η διεξοδική τους ανάλυση**, είναι απολύτως μέσα στις δυνατότητες όλων μας. Αλλά αφού σε κανένα σχολείο δεν έδωσαν ιδιαίτερη έμφαση σε ένα τέτοιο θέμα της πραγματικής ζωής, λίγοι κατάφεραν να το προσεγγίσουν από μόνοι τους. Ας δούμε λοιπόν, πρώτα ποια είναι τα αδύναμα σημεία της ανθρώπινης αντίληψης και στη συνέχεια με

ποιες μεθόδους μπορούμε από μόνοι μας, να κατακτήσουμε αυτήν την **πολύτιμη πηγή δύναμης** στην κατανόηση του κόσμου.

Με στόχο να σας προφυλάξουμε από τα συχνότερα ανθρώπινα λάθη, θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε, να αναλύσουμε και να σας παρουσιάσουμε κάποιες από τις συχνότερες αιτίες σφαλμάτων που κάνουμε ασυναίσθητα και τις παγίδες της ανθρώπινης λογικής σε ατομικό ή συλλογικό επίπεδο. Στη συνέχεια αυτού του κειμένου, θα εξετάσουμε αναλυτικά:

A. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις πλάνης των αισθήσεων, πλάνες και αδύναμα σημεία της αντιληπτικότητας, πλάνες της κρίσης, της νόησης, παγίδες των μεγάλων μεγεθών, των πιθανοτήτων κοινές για όλους τους ανθρώπους. Θα εξετάσουμε το μυστήριο των συμπτώσεων και της τύχης, του μηδενός, του απείρου, της μορφής του γραπτού λόγου.

B. Τη μεθοδολογία της ανάλυσης, της μεθόδου δηλαδή που μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα, τα κρυμμένα νοήματα.

Οδηγίες ανάγνωσης του παρόντος βιβλίου

Αναπτύσσοντας τα θέματα που βρίσκονται σε τούτες τις σελίδες, στόχο έχουμε την κατανόησή τους, από το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό ανθρώπων του ευρύτερου κοινού. Έτσι θα αποφύγουμε την επέκταση σε λεπτομέρειες πού μπορεί να κουράσουν τον αναγνώστη.

Από τα θέματα που θα εξετάσουμε, κάποια είναι από τη φύση τους πιο εύκολα και κάποια πιο δυσνόητα. Άλλωστε ποιος θα ήταν ο λόγος να ασχοληθούμε με τα προφανή; Ακριβώς επειδή κάποια θέματα παρουσιάζουν δυσκολία στην κατανόησή τους, αποτελούν και χαρακτηριστικές περιπτώσεις δυνητικής περίπτωσης ανθρώπινης πλάνης. Μην αφήσετε τον εαυτό σας να παρατήρει την προσπάθεια. Με λίγη επιμονή και κατάλληλη προσέγγιση, πολλά από τα αδύνατα γίνονται δυνατά! Αν λοιπόν κάποια τμήματα από τα κεφάλαια που ακολουθούν σας φανούν δυσνόητα, τότε ακολουθήστε την εξής μεθοδολογία:

1. Αρχικά ξαναδιαβάστε προσεκτικά, λέξη-λέξη το δυσνόητο τμήμα.
2. Αν εξακολουθεί να αντιστέκεται στην πλήρη κατανόησή σας, αγνοείστε το προσωρινά.
3. Προχωρήστε στην ανάγνωση και κατανόηση του υπόλοιπου κεφαλαίου. Συλλάβετε το γενικό νόημα του θέματος.
4. Κρίνετε οι ίδιοι, αν σας είναι απαραίτητο να ξαναγυρίσετε στο δυσνόητο τμήμα. Ξαναδείτε το, κάτω από το πρίσμα του νοήματος όλου του κεφαλαίου.
5. Αφήστε το στην άκρη, για ένα χρονικό διάστημα λίγων ημερών. Οι γνώσεις για να δέσουν στον εγκέφαλο, χρειάζονται κάποιο χρόνο. Εξετάστε το επίμαχο κομμάτι αφού περάσει ο απαραίτητος για εσάς χρόνος.
6. Αν μέχρι τώρα δεν είστε ικανοποιημένοι από το βαθμό αφομοίωσης του δυσνόητου θέματος, τότε προφανώς χρειάζεστε επιπλέον πληροφορίες από εξειδικευμένα στο αντίστοιχο θέμα βιβλία ή αναφορές σε περιοδικά ή στο Internet. Ψάξτε το, ανάλογα.
7. Ασχοληθείτε με ότι σας τραβάει την προσοχή από παραπλήσια θέματα. Οι νέες γνώσεις για να δέσουν, πρέπει να πατήσουν πάνω σε παρεμφερείς παλαιότερες.
8. Φυλάξτε αυτό το έντυπο **σε μια γωνιά, στη βιβλιοθήκη σας**. Την κατάλληλη στιγμή, θα σας ενημερώσει ο εγκέφαλός σας, ότι θέλει να το ξαναμελετήσει.
9. Αυτή η ώριμη στιγμή κατανόησης, μπορεί για μερικά θέματα, για κάποιους να έρθει σε αρκετά χρόνια από τώρα! Ο χρόνος είναι σχετικός!
10. Ακόμα και αν κάτι δεν το κατανοείτε πλήρως, **είναι πολύ σημαντικό να ξέρετε ότι δεν το κατανοείτε**. Η χρησιμότητα είναι εξίσου σημαντική: έτσι μπορείτε να προφυλαχτείτε ενστικτωδώς από τις πλάνες.

Σε περίπτωση που χρειάζεται κατά τη γνώμη σας να αναλύσουμε καλύτερα κάποιο σημείο ή να εξετάσουμε κάποιο άλλο κοντινό θέμα ή αν εντοπίσετε αβλεπίες ή λάθη ή παραλείψεις, μη διστάσετε να επικοινωνήσετε μαζί μας.

A. Τι υπάρχει πραγματικά εκεί έξω;

Είναι τα πράγματα όπως τα αντιλαμβανόμαστε; Είναι το σύμπαν αυτό που βλέπουμε και μετράμε; Είμαστε εμείς οι ίδιοι αυτό που πιστεύουμε ότι έχουμε σαν εικόνα του εαυτού μας; Αυτά που καταγράφουμε με τις αισθήσεις και αντιλαμβανόμαστε με το νου μας, είναι άραγε αλήθειες αντικειμενικές; Υπάρχουν πέρα και ανεξάρτητα από την ύπαρξή μας; Τέτοια ερωτήματα είναι θεμελιώδη, γιατί πάνω τους στηρίζουμε στη συνέχεια, ολόκληρη τη κοσμοθεωρία μας.

Στη εποχή μας, όλοι ή τουλάχιστον οι περισσότεροι, θα συμφωνήσουν ότι δεν είναι πάντα τα πράγματα, έτσι όπως μας φαίνονται. Που είναι όμως το όριο της αντικειμενικής πραγματικότητας και που αρχίζει η λάθος εκτίμηση; Φαίνεται ότι σε πολλά επίπεδα υπάρχουν οι πηγές της πλάνης:

- Αρχικά μπορεί οι αισθήσεις, να μας πληροφορούν λάθος.
- Στη συνέχεια μπορεί ο εγκέφαλός μας, να έχει αδυναμία να επεξεργαστεί σωστά, ορισμένες κατηγορίες θεμάτων. Εδώ εννοούμε ότι ο *φυσιολογικός* μέσος ανθρώπινος εγκέφαλος, έχει εγγενείς αδυναμίες και περιορισμούς.
- Κατόπι είναι το θέμα του πολιτιστικού περιβάλλοντος που κολυμπάει η διανοητική μας ουσία. Μια νέα σωστή αντίληψη, μπορεί να πάρει αιώνες ή χιλιετίες ώσπου να γίνει κτήμα του ανθρώπινου είδους.

Ας δούμε λοιπόν τα προβλήματα με τη σειρά τους.

A.1 Πλάνες των αισθήσεων

Πώς αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο; Αρχικά δια μέσω των πέντε *αισθήσεων*, αλλά και με την *επεξεργασία στη συνέχεια στο νου μας*, αυτών των πληροφοριών που μας έστειλαν τα αισθητήρια. Οι πληροφορίες που μας στέλνονται από τον έξω κόσμο, φιλτράρονται από τον εγκέφαλό μας, σύμφωνα με τις συνήθειες, τις προτιμήσεις και την κατάστασή μας. Μάλιστα υπάρχει συγκεκριμένη περιοχή στη βάση του εγκεφάλου μας, ο **δικτυωτός σχηματισμός**, που ασχολείται με αυτό το φιλτράρισμα των αισθήσεων.

A.1.1. Η ακοή.

Συμβαίνει συχνά να τύχει να συζητάμε με μια παρέα, σε ένα δωμάτιο, όπου ακούγεται η κίνηση των αυτοκινήτων από τη κοντινή λεωφόρο. Ας υποθέσουμε ότι περνάει ένα ασθενοφόρο, με τη σειρήνα του σε λειτουργία. Το πιθανότερο είναι να μην σταματήσουμε τη συζήτηση, παρόλο που ακούσαμε τη σειρήνα, γιατί πολύ απλά δεν μας ενδιαφέρει. Δευτερόλεπτα μετά, μπορεί μάλιστα να μην θυμόμαστε καν, αν πέρασε κάποιο ασθενοφόρο.

Αν όμως συμβεί να έχουμε κάποιον ασθενή για τον οποίο περιμένουμε να έρθει ασθενοφόρο, τότε εντείνουμε περισσότερο την προσοχή μας, από το πρώτο άκουσμα της σειρήνας. Το ίδιο ακουστικό ερέθισμα, ανάλογα με τις συνθήκες, μπορεί να γίνεται αντιληπτό ή να περνάει απαρατήρητο.

Όσοι μένουν από παιδιά κοντά σε σιδηροδρομικές γραμμές και διαβάσεις, έχουν να σας πουν ότι το βράδυ κοιμούνται μια χαρά, παρόλο τον έντονο θόρυβο του τρένου. Συμβαίνει μάλιστα να ξυπνάνε από άλλους πολύ μικρότερους ήχους, όπως μια βρύση που στάζει ή ένα αυτοκίνητο που περνάει έξω. Αν φύγουν για πολλά χρόνια μακριά από αυτό το σπίτι, πχ. για να σπουδάσουν σε άλλη πόλη, τότε ανακαλύπτουν ότι δυσκολεύονται να κοιμηθούν από το ήχο των φορτηγών στο δρόμο, ενώ είναι πολύ λιγότερο έντονος από τον ήχο του τρένου. Όταν όμως γυρίζουν στο παλιό τους σπίτι για διακοπές, από την πρώτη νύχτα απολαμβάνουν ανενόχλητοι τον ύπνο τους, δίπλα στις γραμμές! Κάπως σαν το ποδήλατο. Όταν μάθεις ισορροπία, δεν το ξεχνάς ποτέ, όσα χρόνια και αν περάσουν, ακόμα και αν δεν το χρησιμοποιείς.

Μια μητέρα με βρέφος, που ζουν κοντά σε σιδηροδρομικές γραμμές, ξυπνάει ανήσυχη στο παραμικρό κλάμα από το παιδί της, αλλά μπορεί να κοιμάται κανονικά παρόλο το θόρυβο του τρένου. Μπορεί μάλιστα να ξυπνάει από άλλους, ανεπαίσθητους ήχους που κάνει το μωρό της, όπως το σύρσιμο της κουβέρτας που το έχει σκεπάσει, ή το ρουθούνισμα της μύτης του, αν έχει κρυώσει.

Αντίθετα ένας που δεν έχει συνηθίσει το θόρυβο του τρένου, αν χρειαστεί να μείνει κοντά σε γραμμές τρένου, θα δεινοπαθήσει προσπαθώντας να κοιμηθεί τη νύχτα! Αν μετακομίσει μόνιμα σε σπίτι κοντά σε σιδηροδρομικές γραμμές, η ενόχληση του ήχου από τα τραίνα, μπορεί να κρατήσει 1 με 2 μήνες το πολύ. Σύντομα ο ήχος, εξαφανίζεται από το συνειδητό του.

Μια μητέρα με βρέφος, ξυπνάει αμέσως ανήσυχη στο παραμικρό κλάμα από το παιδί της, αλλά μπορεί να κοιμάται κανονικά, παρόλο το θόρυβο από το διπλανό κέντρο διασκέδασης. Ο άντρας της, ενώ κοιμάται δίπλα της, συνήθως μπορεί να μην ακούει το κλάμα του μωρού. Τουλάχιστον δεν ξυπνάει ακαριαία, όπως η μάνα. Αυτό συμβαίνει διότι η μάνα έχει έμφυτο το ένστικτο να θηλάσει και να φροντίσει το μωρό της. Αυτή η παρατήρηση φυσικά είναι πανάρχαια.

Θα σας έχει συχνά συμβεί, να προσπαθείτε μάταια να εξηγήσετε κάτι, σε κάποιον που δεν τον συμφέρει ή δεν του αρέσει. Πολύ απλά δεν σας ακούει. Όσο μεγαλύτερη η αντίθεσή του με αυτό που ακούει, τόσο περισσότερο κλείνει τα αυτιά του. Μπορεί και να σας το πει, με ειλικρίνεια: «Φεύγω! Δεν ακούω τίποτα». Ο Ιησούς συνόψισε περίφημα το θέμα της πολύπλοκης σχετικότητας της ακοής σε μία εκπληκτική πρόταση:

«Ο έχων ώτα ακούειν, ακουέτω.»
«Όποιος έχει αυτιά για να ακούει, ας ακούσει.»

Στην Αρχαία Ελληνική γλώσσα υπήρχε η κατάλληλη λέξη για όποιον ακούει προσεκτικά: πρόκειται για το ρήμα «ακροώμαι». Δυστυχώς η έντεχνη πτώχευση της σύγχρονης Ελληνικής γλώσσας, δεν κράτησε αυτή τη λέξη. Διατηρήθηκαν ωστόσο τα ουσιαστικά «ακρόαση», «ακροατής» και τα «ακροαστικά» δηλαδή τα προσεκτικά ακουστικά ευρήματα του ιατρού στον πνεύμονα του ασθενή. Η αξία του «ακροάσθε» ήταν σίγουρα πολύ γνωστή στην Αρχαία Ελλάδα. Μάλιστα τα φωνήεντα προφέρονταν είτε *μακρά* είτε *βραχεία*. Δηλαδή η χρονική διάρκεια της προφοράς ενός φωνήεντος ήταν είτε μεγάλη είτε μικρή. Ο λόγος ήταν μελωδικός, ρυθμικός και πλούσιος σε ηχητικούς χρωματισμούς. Με την ακοή καλά εξασκημένη, οι Αρχαίοι Έλληνες ήταν καλύτερα προικισμένοι από εμάς, στην

παρατήρηση των ήχων του κόσμου και στην εξαγωγή κρυμμένων συμπερασμάτων.

Στην Αγγλική γλώσσα, υπάρχει επίσης ο διαχωρισμός των επιπέδων της ηχητικής αντιληπτότητας. Τα ρήματα hear, listen και attend, υποδηλώνουν τη διαφορά ανάμεσα στο άκουσμα και την ακρόαση. Ομοίως στη Γαλλική γλώσσα, τα ρήματα écouter, entendre, και auditionner, εξυπηρετούν το ίδιο φάσμα. Στα Γερμανικά πρωταγωνιστεί το ρήμα hören με διάφορες προθέσεις: hören, anhören, zuhören, abhören, anhören, hören auf. Πολλές άλλες γλώσσες κάνουν επίσης αυτή τη διάκριση. Είναι οδυνηρή συνεπώς η παρατήρηση, ότι το ρήμα «ακροώμαι» πέφτει σε δυσμέλεια και σχεδόν εξαφανίζεται, στη σύγχρονη Ελληνική γλώσσα. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι δεν το χρειαζόμαστε, γιατί δεν ακούμε πια προσεκτικά!

Είδαμε λοιπόν ότι αυτά που ακούμε είναι συνήθως ένας μακρινός αντίλαλος αυτού που υπάρχει πραγματικά. Το τι θα ακούσουμε (τι θα καταγράψει ο εγκέφαλός μας), εξαρτάται πολύ από την κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε. Είναι ήδη ένα πρώτο βήμα, να κατανοήσουμε ότι, **ακούμε κυρίως αυτά που θέλουμε!** Αλλά τι πραγματικά ακούστηκε;

A.1.2. Η όραση.

Ας περάσουμε τώρα στην όραση. Είναι το ζωτικότερο αισθητήριο για την επιβίωσή μας. Αλλά βλέπουμε στ' αλήθεια ακριβώς αυτά που υπάρχουν;

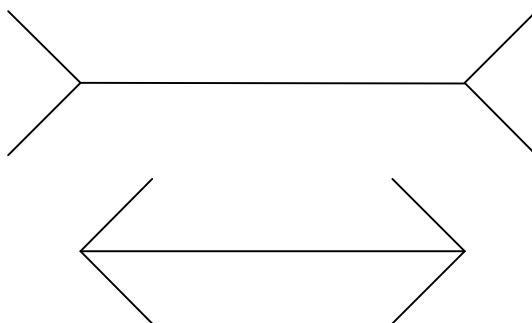
Στη γλώσσα μας υπάρχουν τα ρήματα βλέπω και παρατηρώ. Στην Αγγλική ομοίως υπάρχουν τα αντίστοιχα ρήματα look και see. Στα Γαλλικά θα βρούμε τα ρήματα regarder και voir. Στα Γερμανικά τα sehen, blicken, schauen. Σε κάθε γλώσσα θα απαντήσουμε αυτή τη σοβαρή διαφορά. Το να κοιτάμε απλά και το να κοιτάμε διερευνητικά με σκοπό την κατανόηση, είναι δύο τελείως διαφορετικά πράγματα.

Στην καθομιλουμένη Ελληνική γλώσσα ωστόσο, η χρήση του ρήματος βλέπω, έχει επικρατήσει γενικευμένα, σε βάρος του ρήματος παρατηρώ. Για παράδειγμα, λέμε: «Θα πάω να δω ένα γιατρό». Δηλαδή απλά να τον ...δούμε! Ενώ οι Άγγλοι θα πουν: «I will see a doctor» και οι Γάλλοι: «Je vais voir un médecin». Τα ρήματα που χρησιμοποιούν (see, voir) υποδηλώνουν την έννοια του «να δω προσεκτικά, να συμβουλευτώ». Αντίθετα η ελληνική πρόταση «Θα πάω να δω ένα γιατρό», μεταφέρει μια ελαφρότητα, στα όρια της ανευθυνότητας. Η αντίστοιχη σωστή φράση «Θα πάω να παρατηρήσω ένα γιατρό», ακούγεται τόσο ξένη, που τελικά δεν λέγεται. Αλλά και η κοντινή φράση «Θα πάω να συμβουλευτώ ένα γιατρό», δεν λέγεται συχνά. Ακούγεται αρκετά σοβαρή, στην αβάσταχτη ελαφρότητα του είναι μας!

Υπάρχουν πολλά προβλήματα με την όραση και την αναγνώριση του τι βλέπουμε. Πόσος καιρός πάει από τότε που είδατε κάποιο άρθρο ή βιβλίο που να αναφέρεται στις ...

A.1.2.1 Οφθαλμαπάτες

Μήπως ποτέ αναρωτηθήκατε, τι μπορούν να μας διδάξουν για την ανθρώπινη φύση; Στο παρακάτω σχήμα υπάρχει η κλασική περίπτωση του μήκους:



Ποιο ευθύγραμμο τμήμα σας φαίνεται μεγαλύτερο; Το πάνω ή το κάτω; Οι περισσότεροι θα απαντήσουν το πάνω. Ωστόσο αν τα μετρήσετε με ένα χάρακα, θα δείτε ότι έχουν το ίδιο ακριβώς μήκος. Ωραία, σας το είπαμε, τα μετρήσατε, βρήκατε ότι είναι ίδια. Τώρα κοιτάξτε τα ξανά. Έχουν το ίδιο μήκος; Η γνώση ότι πρόκειται για οφθαλμαπάτη, σας αλλάζει την εικόνα ή εξακολουθείτε να βλέπετε το επάνω μεγαλύτερο; Οι περισσότεροι θα απαντήσουν ξανά το πάνω. Ακόμα και η μέτρηση και η λογική, δεν μας εμποδίζουν να συνεχίζουμε να βλέπουμε την εικόνα λάθος. Η γνώση της ισότητας των δύο ευθύγραμμων τμημάτων, μας είναι άχρηστη. Εξακολουθούμε να βλέπουμε τον κόσμο λάθος. **Η διακόσμηση** με τις μικρές γραμμές στην αρχή και το τέλος των ευθυγράμμων τμημάτων, **αλλοιώνει** οριστικά την ιδέα που σχηματίζουμε για το μήκος τους.

Υπάρχουν όμως και οι οφθαλμαπάτες που όταν τις εντοπίσουμε, η εικόνα που βλέπουμε μετά, είναι η σωστή.

Στο Παράρτημα 1 συγκεντρώσαμε σας παρουσιάζουμε, κάποια αντιπροσωπευτικά δείγματα με οφθαλμαπάτες από διάφορες κατηγορίες. Δείτε, απολαύστε και αναρωτηθείτε!

Οι *Μαθηματικές και Γεωμετρικές* οφθαλμαπάτες έχουν την ομορφιά της απλότητας. Με τα λίγα μόνο απλά βασικά σχήματα, μπορούμε να αντιληφθούμε το μέγεθος της πλάνης της όρασης. Γνώριμα από την παιδική μας ηλικία σχήματα, παραμορφώνονται από τη θέση ή την κλίση που έχουν, ή την επίδραση κάποιου άλλου σχήματος στο υπόστρωμα. Πάρτε χάρακα και διαβήτη, μετρείστε και πειστείτε! Βλέπετε ήδη κάποιες εφαρμογές από την μελέτη σε αυτή την κατηγορία; Μα φυσικά. Από την ένδυση μέχρι τη σωστή θέση που πρέπει να μπουν τα πλακάκια σε ένα μπάνιο! Δεν μπορείς να λέγεσαι αρχιτέκτονας ή διακοσμητής, αν πρώτα δεν κατέχεις καλά, την γνώση αυτή. Την πανάρχαια τέχνη του οπτικού σφάλματος.

Τα *Αδύνατα σχήματα* είναι η αγαπημένη κατηγορία των ζωγράφων και των διαφημιστών! Τα σχέδια ξεφεύγουν από την πραγματικότητα και σε οδηγούν σε ανύπαρκτους κόσμους. Πως οι διαφημιστές μας πείθουν για το ακατόρθωτο; Ωστόσο που σταματάει το δυνατό και που ξεκινάει το αδύνατο; Ένα μυστήριο συναίσθημα μας καταλαμβάνει βλέποντας τις πύλες για το άγνωστο. Ποιος θα

τολμήσει να διαβεί αυτές τις πύλες; Σπουδαίοι καλλιτέχνες όπως ο Escher, τόλμησαν. Εσείς;

Οι *Διφορούμενες εικόνες*, προσφιλείς από αιώνες σε όλους, χαρακτηρίζονται από μία υψηλή ευφυΐα στη καλλιτεχνική δημιουργία. Τι κρύβεται πίσω από την αρχική εικόνα που βλέπουμε; Με λίγο υπομονή και πείσμα, θα το δούμε. Όπως και στη ζωή μας. Πόσα θέματα έχουν πολλές όψεις; Πολλά ασφαλώς. Από πόσα όμως εμείς, μπορούμε να συλλάβουμε και τη συμπληρωματική τους όψη; Καλλιτέχνες υπάρχουν πολλοί. Dalí όμως, ένας.

Στα *Μετεικάσματα και ψευδο-κινήσεις*, αλλάζουμε κλίμα. Μπαίνουμε στον επιστημονικό κόσμο των ερευνητών νευρολόγων, ψυχολόγων, νευροφυσιολόγων κλπ. Αυτές οι εικόνες, φτιάχνονται σε εργαστήρια, συνήθως από εξειδικευμένα άτομα με σκοπό την εξήγηση της φυσιολογικής λειτουργίας του δίπτυχου οφθαλμός – νους. Οι ειδικές αντιδράσεις του νου μας κάτω από συγκεκριμένα οπτικά ερεθίσματα, δεν παύουν να μας εκπλήσσουν. Εδώ οι πληροφορίες που παίρνουμε, μας διαφωτίζουν πάνω στο πως και τι ακριβώς βλέπουμε. Πολλές άλλες τέτοιες εικόνες, χρειάζονται κίνηση για να φανεί το αποτέλεσμα, και έτσι δεν μπορούμε να τις συμπεριλάβουμε σε τούτο το έντυπο.

Στα *Σχήματα που Περιστρέφονται ή Κυματίζουν*, η οπτική φύση αυτών των εικόνων, αναγκάζει το νου να νομίσει ότι έχει να κάνει με κινούμενα σχέδια. Δυστυχώς δεν θα μπορέσετε να δείτε σε χαρτί σχεδόν τίποτε. Αυτή η ιδιαίτερα εντυπωσιακή κατηγορία αναδύεται μόνο μπροστά στην οθόνη. Περιλάβαμε όμως εδώ, κάποια δείγματα, ώστε να υποψιαστείτε, τι χάνετε!

Τέλος, στα *Στερεογράμματα*, θα εκπλαγείτε βαθιά, αν δεν τα γνωρίζεται ήδη. Πρόκειται για μία σχετικά πρόσφατη κατηγορία τεχνητών εικόνων, που δημιουργούνται με την τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών, και έχει κάνει δυναμικά την είσοδό της, στον ατελείωτο κατά τα φαινόμενα κόσμο της οφθαλμαπάτης. Η διαφορά εδώ, είναι ότι οι παραγόμενες εικόνες, είναι κρυστάλλινες και τρισδιάστατες. Η εμπειρία είναι μοναδική. Οι εικόνες έχουν μια εκπληκτική καθαρότητα και διαύγεια, περιέργως σαφώς ανώτερη από την συνηθισμένη όραση! Η εξωπραγματική διαύγεια των εικόνων, μας κάνει να υποθέτουμε ότι πρόκειται για απευθείας σύλληψη νοητικών αναπαραστάσεων, για τμήματα δηλαδή «πραγματικότητας» που δεν υφίστανται στον υλικό κόσμο. Μια αρχική εισαγωγή ίσως, στην εικονική πραγματικότητα. Για την ιδιαίτερη τεχνική που χρειάζεται, για να απολαύσετε τα στερεογράμματα, διαβάστε στο παράρτημα 1.6

Οι οφθαλμαπάτες στηρίζονται στη φυσιολογική λειτουργία της οπτικής αντίληψης. Για αυτόν ακριβώς το λόγο, ότι δηλαδή **είναι μέσα στη φύση μας να πλανηθούμε τόσο πολύ**, από τα ίδια μας τα μάτια, πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί. Το πλήγμα στον εγωισμό μας είναι μεγάλο. Υπάρχει ο κίνδυνος να απορρίψουμε τη συνειδητοποίηση ότι αντιλαμβανόμαστε τα μισά από αυτά που βλέπουμε ή ακόμα χειρότερα ότι τα αντιλαμβανόμαστε λάθος. Ο κίνδυνος να νομίσουμε ότι οι οφθαλμαπάτες είναι παιχνίδια για τα παιδιά. Η αλήθεια είναι ότι οι οφθαλμαπάτες μας ανησυχούν κατά βάθος. Μας κάνουν να αισθανθούμε τα πεπερασμένα όρια του είδους μας. Ανοίγουν την πόρτα στην υπαρξιακή ανασφάλεια. Αυτός είναι και ο λόγος που η τέχνη τις αγκάλιασε, τις αποδέχθηκε και

τις χρησιμοποιεί σαν εργαλεία. Γιατί η δουλειά της τέχνης είναι να μας γνωρίσει αυτό που δεν λέγεται με τα λόγια. Να μας κάνει να βιώσουμε αυτό που πράγματι είμαστε.

Πως είναι δυνατόν θα αντικρούσετε, ένα όν σαν τον άνθρωπο, με τόσο ατελές οπτικό σύστημα αντίληψης, να έφτασε μέχρι το φεγγάρι και πιο πέρα; Πολύ ενδιαφέρον ερώτημα. Πολύ περισσότερο από ότι φαίνεται. Για την απάντησή του όμως, χρειαζόμαστε και άλλα στοιχεία. Αλλά πάλι σήμερα κατανοούμε απείρως περισσότερα από ότι πριν λίγες χιλιάδες χρόνια. Ποιος θα φανταζόταν ότι η γη είναι σαν σφαίρα; Ότι η γη γυρίζει γύρω από τον ήλιο; Ότι σε κάθε κόκκο άμμου, υπάρχουν ασύλληπτα πολλά σωματίδια, που χορεύουν τρελά μεταξύ τους, κάτω από τη μουσική των πυρηνικών δυνάμεων; Ότι το ίδιο το φως καμπυλώνεται κάτω από την ισχυρή έλξη της βαρύτητας των μεγάλων ουράνιων σωμάτων; Ότι υπάρχουν αδηφάγα και μυστηριώδη ουράνια σώματα όπως οι περίφημες μαύρες τρύπες, που εξορισμού δεν φαίνονται;

Οι οφθαλμαπάτες είναι γύρω μας, παντού και πάντα, σε όλα τα επίπεδα. Μας πήρε χρόνο πολύ να δούμε την πραγματικότητα, όπως τη βλέπουμε σήμερα. Είναι σίγουρο επίσης ότι σήμερα, πολλές άλλες λαθεμένες αντιλήψεις μας, είναι δίπλα μας, γύρω μας, αλλά αδυνατούμε να τις συλλάβουμε στην πραγματική τους διάσταση. Αλλά σε δύο – τρεις χιλιάδες χρόνια από τώρα, ποιες ακόμα οφθαλμαπάτες (που σήμερα πιστεύουμε ότι είναι αντικειμενική πραγματικότητα) θα έχουμε κατανοήσει; Ποια σύνορα μας περιμένουν να τα κατακτήσουμε;

Κρατήστε τα παραπάνω στην άκρη του μυαλού σας. Την επόμενη φορά που θα είστε πολύ σίγουροι για κάτι, ξανασκεφτείτε το. Μήπως πρόκειται για κάποιες μορφές οφθαλμαπάτης;

A.1.2.2 Η όραση του γραπτού λόγου.

Ο προφορικός λόγος αναπτύχθηκε από πολύ παλιά στο ανθρώπινο είδος. Αλλά η ανακάλυψη της γραφής είναι πολύ πιο πρόσφατη. Τι είναι ο γραπτός λόγος; Είναι μια προσυμφωνημένη τεχνική μέθοδος απεικόνισης πάνω σε στερεά αντικείμενα, του προφορικού λόγου. Η ευρεία χρήση της γραφής εξακόντισε στα ύψη τον ανθρώπινο πολιτισμό.

Αλλά ταυτόχρονα δημιούργησε ένα άλλο πρόβλημα. Έπρεπε όλοι στην ίδια περιοχή, να εκπαιδευτούν στη χρήση του. Η γραφή και η ανάγνωση είναι φυσικά τα πρώτα πράγματα που μαθαίνουν τα παιδιά στο σχολείο. Μεγάλη σπουδή δείχνουν οι δάσκαλοι, για να μυήσουν τα παιδιά, στην ορθογραφία. Διαβάστε όμως προσεκτικά το παρακάτω απόσπασμα:

Χραλασώτε και κιτοτάξε σουικνλά τις λξέεις που αλκούουθον.
Βζάτεγε νμόηα; Σε λγία δρυετελότεπα ατιλαμάνβνεστε τι σαμυεβίνι.

Ααριά και πού, έομυχε τη χραά να δύμοε έανν άθνωππο, να πατρεαηρί και να κεανταοί σε βθάος, τον έξω κμσόο. Αμόκα πιο σνάιπα θα ετμονίσπουε κπιάοον, που να ππορθσαεί να ανσελύι και να κεαναοτήσι ατυά που περατηαρί. Φίεατανι πως οι πρισεσερότοι άθπρνωοι, δεν γοωρίνζυν τη μδθοέο για να δυβαάζιον πσίω από τα πάγατρμα, να πίυρανον τα μανύμητα που ατυά μύππορον να μας δυσών.

Ατυό που δασβιάατε εανίι και το πισόμρα μαις τλευτααίεσ αλιγκήγσ μλετηέσ: Για την κτασνόαηη του γασπρτύ λογού ακερί το πτώρο και το τίλευεταο γμάρμα κθάε ληξέσ να εανίι στη θσέη τυοσ.

Απίστευτο; Οι περισσότεροοι από εσάς θα διάβασαν περίπου άνετα, ολόκληρο το ανορθόγραφο ένθετο. Μάλιστα φρόντισα να μην είναι εύκολο να αναγνωριστεί κάθε λέξη ξεχωριστά. Μόνο το πρώτο και το τελευταίο γράμμα κάθε λέξης είναι στη θέση τους. Τότε πως αντιλαμβανόμαστε το γραπτό λόγο;

Φαίνεται πως ο οφθαλμός, από την οπτική σάρωση του κειμένου, μεταδίδει στον εγκέφαλο, ολόκληρα πακέτα πληροφορίας για κάθε λέξη και όχι κάθε γράμμα ξεχωριστά. Κάτι σαν το ειδικό βάρος κάθε λέξης, ας πούμε. Η αναπαράσταση μια λέξης στο νου μας, μοιάζει με το κλειδί. Ταιριάζει σε μία μόνο κλειδαριά. Το πολύ, από σύμπτωση και σε κάποια άλλη!

Τι άλλο μας δείχνει αυτό το εκπληκτικό εύρημα; Δείτε την παρακάτω λέξη:

ΚΕΑΝΤΑΟΪ

Δύσκολα κανείς αντιλαμβάνεται τι σημαίνει. Παρόλο που χωρίς δυσκολία την διαβάσατε μέσα στο ανορθόγραφο ένθετο, έξω από αυτό και μόνη της, δεν γίνεται αντιληπτή. Τα συμφραζόμενα είναι που δίνουν την κατανόηση. Πράγματι υπάρχουν πολλές γλώσσες και σήμερα, που αφήνουν τα σύμβολα του γραπτού λόγου, να ταιριάζουν, μέσα στο νου μας, στη σωστή έννοια.

Ο γραπτός δηλαδή λόγος, μοιάζει περισσότερο με έναν εμπορικό σιδηρόδρομο που μεταφέρει διαφορετικά φορτία. Ας πούμε ότι μεταφέρει τα νοηματικά φορτία. Παρατηρώντας ολόκληρη την αλληλουχία των νοματοφορτίων, αναγνωρίζουμε το πνεύμα αυτού που το έγραψε. Κοιτώντας από πολύ κοντά σε κάθε βαγόνι, χάνουμε το νόημα. Πρέπει να δούμε όλη την εικόνα.

Το νοματοφορτίο κάθε λέξης δεν είναι καθόλου αφηρημένη έννοια. Αρκετοί αριθμομημονες ισχυρίζονται ότι «βλέπουν» τους αριθμούς, να σχηματίζονται μπροστά τους. Δεν μπορούν να εξηγήσουν πως το κάνουν. Είναι σαν να συναρμολογούν ένα τρισδιάστατο ruzzle. Όταν τους ζητούν πόσο κάνει το γινόμενο δύο αριθμών, που ο καθένας έχει 5, 6 ή και παραπάνω ψηφία, αρχίζουν να οραματίζονται τους 2 αριθμούς με τα ψηφία τους σε πολύχρωμη τρισδιάστατη αναπαράσταση. Σιγά-σιγά βλέπουν τα ψηφία να μετασχηματίζονται με περιστροφές, να ενώνονται το ένα με το άλλο, να αποκόβονται τμήματα και τελικά τα ψηφία του αποτελέσματος, παρουσιάζονται μπροστά τους. Παραμένει άλυτο αίνιγμα, πως ακριβώς δουλεύει ένας τέτοιος εγκέφαλος. Φαίνεται πως κάποια φυσιολογική λειτουργία τρισδιάστατης απεικόνισης, αυξάνει ασυνήθιστα. Εμπειρικά γνωρίζουμε ότι κάτι τέτοιο είναι απόλυτα εφικτό.

Πάρτε για παράδειγμα τους σκακιστές. Όσοι από εσάς παίζουν αυτό το παιχνίδι, γνωρίζουν ότι δεν μπορούν να κάνουν δοκιμές, μετακινώντας τα κομμάτια πάνω στη σκακιέρα, την ώρα του παιχνιδιού. Πρέπει να οραματιστούν τη θέση που θα προκύψει, μετά από την κίνηση που υπολογίζουν να κάνουν. Δηλαδή να δουν τις πιθανές απαντήσεις του αντίπαλου και να κρίνουν αν πρέπει να προχωρήσουν. Οι συνηθισμένοι παίκτες «βλέπουν» όλο το παιχνίδι σε βάθος ανάλυσης 3 ή 4 κινήσεων. Αν μετρήσει κανείς (τα κομμάτια που μπορούν να κινηθούν, επί τις πιθανές απαντήσεις που μπορεί να δώσει ο αντίπαλος, επί 3 ή 4 βάθος κινήσεων), τότε όλες τις δυνατές απεικονίσεις που είναι μέσα στο νου τους, ήδη είναι πολλές. Όμως οι κορυφαίοι παίκτες αναλύουν το παιχνίδι σε βάθος 8 ή παραπάνω κινήσεων. Αρκετοί δε από αυτούς, άνετα παίζουν ταυτόχρονα (σιμουλτανέ στην ορολογία τους) με 10 παίκτες.

Αφού λοιπόν έτσι έχουν τα πράγματα, τότε τι σημαίνει η λέξη *ανάγνωση*; Ίσως προσέξατε ότι αποφύγαμε να ονομάσουμε «ανάγνωση» τον τίτλο αυτού του θέματος. Προτιμήσαμε όχι τυχαία την περιφραση: «Η όραση του γραπτού λόγου». Γιατί η ανάγνωση, θυμίζει έντονα τις οφθαλμαπάτες. Στο παράδειγμα του ανορθόγραφου ένθετου είχαμε μια αντίστροφη σχέση: Από εσφαλμένη εικόνα οδηγηθήκαμε στη σωστή αντίληψη.

Αξίζει να αναρωτηθούμε: Άραγε όμως, από «σωστή» εικόνα γραπτού λόγου αντιλαμβανόμαστε πάντα σωστά; Πολλά έχουν γραφτεί για τα κρυμμένα μηνύματα του γραπτού λόγου. Όπως και να είναι, να κοιτάτε πάντα πίσω από τις γραμμές, μήπως ελλοχεύουν αθέατα νοήματα που σας περιμένουν να τα ανακαλύψετε!

A.1.2.3 Χρώματα και γραπτός λόγος: Σκλάβος μου για πάντα!

Ο γραπτός λόγος υπερέχει της κατανόησης του χρώματος. Η δύναμη, το βάρος, το φορτίο των γραπτών λέξεων, μας κλειδώνουν πάνω στην έννοια που μεταφέρουν στον εγκέφαλο. Δείτε πόσο δύσκολο είναι να ξεφύγουμε από τη σκλαβιά της «ανάγνωσης».

Δοκιμάστε να διαβάσετε στο παρακάτω ένθετο, τα ΧΡΩΜΑΤΑ κάθε λέξης, (όχι τις ίδιες τις λέξεις):



Χρειάζεται πολύ προσπάθεια για να ξεφύγει το βλέμμα, από τη συμβολοσειρά και να «δει» το πραγματικό χρώμα. Αυτή η δυσκολία που αισθάνεστε μέσα σας, είναι κάπως σαν να θέλετε να τρέξετε, αλλά μια σιδερένια μπάλα στα πόδια, σας φρενάρει.

Δοκιμάστε τώρα το αντίστροφο: να διαβάσετε στο παραπάνω ένθετο, τις ίδιες τις λέξεις, (όχι τα χρώματα κάθε λέξης). Βλέπετε με πόση ευκολία τα καταφέρατε; Η ανάγνωση γίνεται σχεδόν ανεπηρέαστη από το χρώμα των λέξεων. Σαν να ήταν όλα το ίδιο χρώμα! Καθόλου δεν σας πείραξε, που οι λέξεις είναι πολύχρωμες.

Ελπίζουμε ότι κατανοείτε τώρα κάπως καλύτερα, τι εννοούμε ότι πρέπει να παρατηρούμε και να κατανοούμε τα πράγματα σε πολλά επίπεδα.

A.1.2.4 Γραπτός λόγος και εικόνες από γράμματα

Σε τι άλλο μπορεί να φανούν χρήσιμα, αυτά τα μικρά σύμβολα που ονομάζονται γράμματα; Μα φυσικά στην τέχνη! Μπορούμε για παράδειγμα, να τα χρησιμοποιήσουμε σαν χρωματική αναπαράσταση της έντασης του άξονα «άσπρο – γκρι – μαύρο». Αυτό ονομάζεται ASCII ART, και είναι ανακάλυψη των πρώτων ετών της πληροφορικής, όταν οι πρώτοι εκτυπωτές δεν μπορούσαν ακόμα να τυπώσουν γραφικά. Οι νοσταλγοί αυτής της παράξενα γοητευτικής μορφής τέχνης, δημιουργούν ακόμα. Δείτε τη σελίδα που ακολουθεί:

A.2 Εγγενείς αδυναμίες του ανθρώπινου εγκέφαλου.

A.2.1. Η εκθετική αδυναμία.

Το ανθρώπινο μυαλό όμως, έχει και άλλες αδυναμίες. Μια **χαρακτηριστική δυσκολία έχουμε στη σωστή εκτίμηση των διαδοχικά αυξανόμενων μεγεθών, συνδυασμών και πιθανοτήτων**. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

A.2.1.1 Το σιτάρι και το σκάκι.

Θα έχετε ίσως ακούσει το περίφημο πρόβλημα με *το σιτάρι και το σκάκι*: Κάποτε ένας βασιλιάς ρώτησε με ποιο τρόπο μπορούσε να ξεπληρώσει τις καλές υπηρεσίες ενός υπηκόου του.

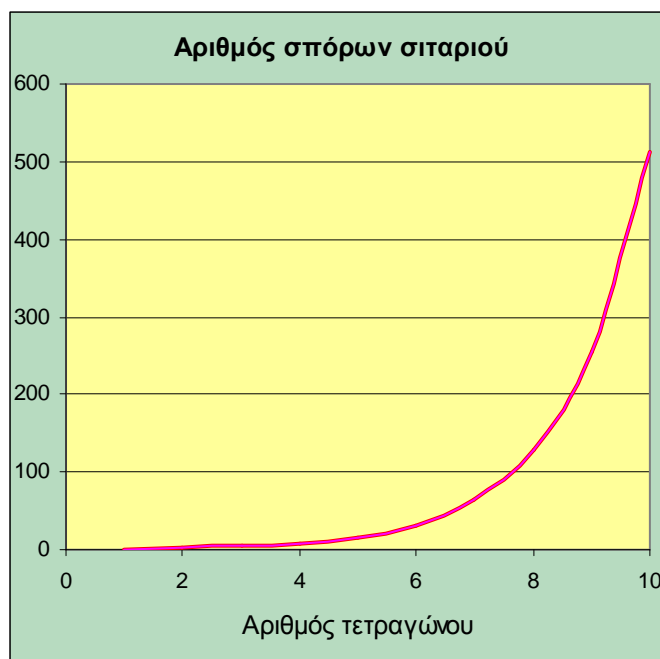
«Εύκολο βασιλιά μου.» αποκρίθηκε ο πονηρός υπήκοος. «Άκουσε τι θέλω: Θα πάρεις μια σκακιέρα. Στο πρώτο τετράγωνό της, θα βάλεις 1 σπυρί σιτάρι. Στο δεύτερο και σε κάθε επόμενο, θα βάζεις το διπλό σιτάρι από ότι στο προηγούμενο.»

Ο βασιλιάς διέταξε αμέσως τον οικονόμο του παλατιού, να του μετρήσει το σιτάρι που ζήτησε. Μπορείτε να υπολογίσετε χονδρικά με το μυαλό σας, για τι ποσότητα μιλάμε; Ένα σακί, ένα φορτηγό, ένα καράβι φορτωμένο σιτάρι ή πολύ περισσότερο;

Σε λίγες ώρες ο βασιλιάς, άφρισε από το κακό του, ακούγοντας τα απίστευτα νέα. Είχαν αδειάσει όλες οι βασιλικές αποθήκες, από όλο το σιτάρι και πάλι δεν έφτανε για να πληρωθεί ο υπήκοός του!

Ας μετρήσουμε λοιπόν, για να δούμε τι συνέβη. Το σκάκι έχει 64 τετράγωνα. Οι ποσότητες που πρέπει να μπουν σε κάθε τετράγωνο, έχουν ως εξής: Στο 2^ο τετράγωνο θα βάλουμε $2*1=2$ δηλαδή 2^1 σπόρους, στο 3^ο τετράγωνο $2*2=4$ δηλαδή 2^2 , στο 4ο τετράγωνο $2*4=8$ δηλαδή 2^3 , κλπ οπότε στο 64ο τετράγωνο πρέπει να βάλουμε 2^{63} σπόρους. Αυτός είναι ένας αριθμός με 19 ψηφία, και συγκεκριμένα είναι ο "9.223.372.036.854.775.808". (Στο Παράρτημα 2.3, στο τέλος, θα βρείτε αναλυτικά όλους τους υπολογισμούς. Να σημειώσουμε ότι τα συνήθη προγράμματα γραφείου δεν μπορούσαν να υπολογίσουν σωστά τις ποσότητες πάνω από 2^{50} και χρειάστηκε να ανατρέξουμε σε ειδικό λογισμικό!)

Γιατί λοιπόν ο βασιλιάς δεν μπόρεσε να υπολογίσει χοντρικά την ποσότητα που του ζήτησε ο υπήκοός του; Παρατηρήστε το διάγραμμα που ακολουθεί:



Από τα 10 πρώτα τετράγωνα, βλέπετε τη μορφή της καμπύλης. Πρόκειται για μία *εκθετική* καμπύλη, όπως ονομάζεται στα μαθηματικά. Παρατηρείστε πόσο απότομα αρχίζει να ανεβαίνει. Φαντάζεστε πως συνεχίζεται μέχρι το 64^ο τετράγωνο!

Τώρα ξέρετε τι συμβαίνει. Μετά τους πρώτους υπολογισμούς, *οι εκθετικές ποσότητες είναι ασύλληπτες* από τον ανθρώπινο νου. Αλλά αντί να μας χτυπήσει κάποιου είδους «προειδοποιητικό κόκκινο σήμα», απλά παραιτείται και προχωράει ανέμελα, στο επόμενο θέμα.

A.2.1.2 Η σύμπτωση των γενεθλίων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε συγκεντρωμένη μια τυχαία ομάδα 30 ανθρώπων. Ας παραδεχθούμε επίσης ότι κάθε ένας από αυτούς, έχει την ίδια πιθανότητα να έχει γεννηθεί μια οποιαδήποτε ημέρα του έτους, δηλαδή 1/365. *Ενστικτωδώς* τι θα λέγατε, *πόσο είναι πιθανό ή απίθανο* να βρεθούν 2 τουλάχιστον άνθρωποι σε αυτή την ομάδα, με ίδια γενέθλια; Πολύ πιθανό; Λίγο πιθανό; Τι πιστεύετε; Αν η ομάδα έχει, ας πούμε 23 ή 57 άτομα, τότε *πόσο πιθανή ή απίθανη* βρίσκετε αυτή τη σύμπτωση των γενεθλίων; Πολύ; Λίγο; Για χάρη της απλοποίησης ας μην ασχοληθούμε με τα δίσεκτα έτη.

Σταματήστε για λίγο την ανάγνωση αυτού του κειμένου, σκεφτείτε και προσπαθήστε να δώσετε μια έστω πρόχειρη και διαισθητική εκτίμηση στην απάντηση.

Οι περισσότεροι άνθρωποι, οποιουδήποτε μορφωτικού επιπέδου και αν είναι, πιστεύουν ενστικτωδώς ότι είναι ή μάλλον απίθανο ή λίγο πιθανό, να συμβεί τέτοια σύμπτωση. Ωστόσο κάνουν μεγάλο λάθος. Γιατί; Ας υπολογίσουμε πρώτα την σωστή απάντηση.

Έστω ότι αριθμούμε τα μέλη της ομάδας: ο 1^{ος}, ο 2^{ος}, κλπ. Για να λυθεί αυτό το πρόβλημα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα *κόλπο*. Η πιθανότητα π να συμβεί ένα γεγονός, σημαίνει επίσης ότι η πιθανότητα να μην συμβεί αυτό το

γεγονός, είναι 1-π. Θα βρούμε λοιπόν πρώτα την πιθανότητα **να μην έχει κανείς** ίδια γενέθλια. Μετά με μία αφαίρεση από το 1, βρίσκουμε τη σωστή απάντηση. (Στο Παράρτημα 2.4, στο τέλος, θα βρείτε αναλυτικά όλους τους υπολογισμούς.)

Η πιθανότητα να έχει γεννηθεί κάποιος μία συγκεκριμένη μέρα είναι 1/365. Η πιθανότητα να μην έχει γεννηθεί κάποιος μία συγκεκριμένη μέρα είναι 364/365. Η πιθανότητα να μην έχει γεννηθεί κάποιος δύο συγκεκριμένες μέρες, είναι 363/365 και ούτω καθεξής.

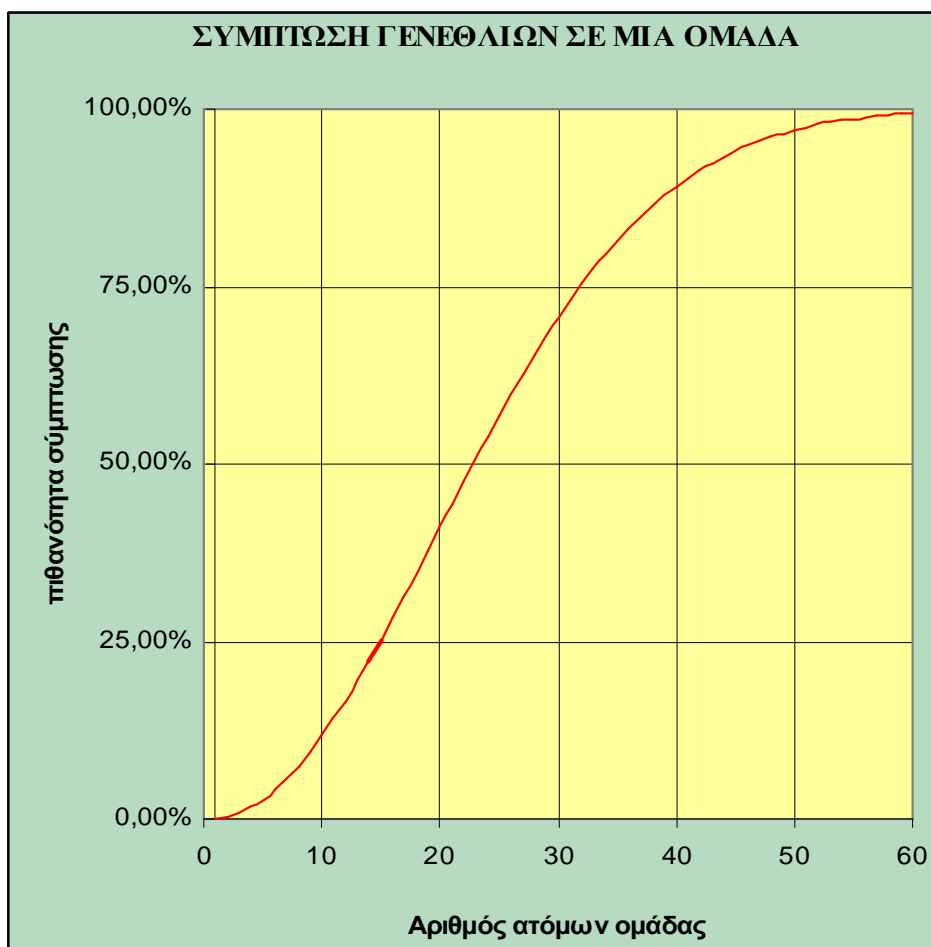
Αν η ομάδα είχε 2 μόνο μέλη, τότε η πιθανότητα *να μην έχει γεννηθεί ο 2^{ος}* την ίδια ημέρα με τον 1^ο, είναι $364/365=0,9973$ ή 99,73%. Άρα η πιθανότητα *να έχει γεννηθεί ο 2^{ος}* την ίδια ημέρα με τον 1^ο, είναι $1-99,73\% = 0,27\%$.

Αν η ομάδα είχε 3 μόνο μέλη, τότε η πιθανότητα *να μην έχει γεννηθεί ο 3^{ος}* την ίδια ημέρα ούτε με τον 1^ο, ούτε με τον 2^ο, είναι $363/365 = 0,9945$ ή 99,45%. Εμείς όμως θέλουμε να συμβαίνει αυτό το γεγονός (που έχει πιθανότητα $\pi_1=99,45\%$), *αλλά ταυτόχρονα και* το γεγονός της προηγούμενης παραγράφου, δηλαδή και οι δύο πρώτοι μεταξύ τους να μην έχουν κοινά γενέθλια, (που έχει πιθανότητα $\pi_2=99,73\%$). Ποια είναι η πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα, δύο ανεξάρτητα γεγονότα, με πιθανότητες π_1 και π_2 αντίστοιχα; Από τα σχολικά βιβλία μαθαίνουμε ότι πρέπει απλά να πολλαπλασιάσουμε τις δύο πιθανότητες. Άρα στην περίπτωση μας, $\pi_1 * \pi_2 = 99,45\% * 99,73\% = 99,18\%$. Αυτή είναι η πιθανότητα *να μην έχει κανείς* από τα 3 μέλη της ομάδας ίδια γενέθλια. Άρα η πιθανότητα να έχουν ίδια γενέθλια, κάποια από τα 3 μέλη της ομάδας, υπολογίζεται με την αφαίρεση $1-99,18\%=0,82\%$.

Προχωράμε τους υπολογισμούς με τον ίδιο τρόπο, για όλες τις ομάδες μέχρι τα 30 άτομα. Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 2 μέλη με ίδια γενέθλια φτάνει στο απίστευτο ποσοστό του **70,63%**. Εδώ τελείωσε η μαθηματική επίλυση. Έτσι τώρα μπορούμε να αρχίσουμε την ανάλυση.

Στο Παράρτημα 2.4, προσέξτε ότι ήδη από τα 23 άτομα, η πιθανότητα ξεπερνάει το 50%, ενώ από τα 57 άτομα, η πιθανότητα ξεπερνάει το 99%. Τίποτα δεν μπορούσε να μας προειδοποιήσει για τόσο μεγάλα ποσοστά, όταν ακούγαμε το πρόβλημα. Ο ανθρώπινος νους αποτυγχάνει να υπολογίσει την απάντηση έστω και κατά προσέγγιση τάξης μεγέθους. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι παίρνει κατευθείαν λάθος πορεία στη σκέψη. Οι περισσότεροι απαντούν ότι αφού υπάρχουν 365 ημέρες στο χρόνο, τότε διαιρούν τα 30 άτομα με τις 365 ημέρες, οπότε $30/365=6,76\%$. Διαισθητικά, το 30 είναι πολύ μικρότερο από το 365, οπότε εσφαλμένα αναμένουν κάποιο μικρό ποσοστό. Γιατί συμβαίνει αυτή η αποτυχία;

Πρέπει να σας διαβεβαιώσουμε καταρχάς, ότι δεν υπάρχει κάποιος μαθηματικός τύπος που να διευκολύνει αυτούς τους υπολογισμούς. Πρέπει να αρχίσουμε να υπολογίζουμε *διαδοχικά* όλες τις ομάδες, με πληθυσμό από το 1 και πάνω. Παρατηρείστε το παρακάτω διάγραμμα, με τις πιθανότητες μέχρι ομάδες 60 ατόμων. Δείτε την καμπύλη, πόσο απότομα αρχίζει να ανεβαίνει, μετά τα πρώτα λίγα άτομα. Σας θυμίζει κάτι;



Εδώ είναι το πρόβλημα. Ο ανθρώπινος νους δεν μπορεί να συλλάβει διαισθητικά πολλά διαδοχικά βήματα υπολογισμών και συνδυασμών. Σε κάθε ομάδα χρειάστηκε να υπολογίσουμε ότι, κάθε μέλος της δεν έχει ίδια γενέθλια με όλους τους υπόλοιπους αλλά και ότι όλοι οι προηγούμενοι δεν έχουν γενέθλια μεταξύ τους. Αυτό κρύβει μέσα του την ιδέα ότι υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί που πρέπει να εξετασθούν. Όσο αυξάνονται τα μέλη της ομάδας, τόσο αυξάνονται ραγδαία οι συνδυασμοί. (Δείτε στο Παράρτημα 2.2 το διάγραμμα που δείχνει πόσο απότομα αυξάνει ο αριθμός των συνδυασμών.)

Ο ραγδαίος ρυθμός αύξησης, διαφεύγει από το νου μας και τον αναγκάζει να σφάλει. Ειδικά όταν πρόκειται για πιθανότητες και συνδυασμούς, τα πράγματα χειροτερεύουν περισσότερο. Η ίδια η έννοια της πιθανότητας, είναι δύσκολη στη σύλληψή της. Πόσο μάλλον οι υπολογισμοί πιθανότητας ταυτόχρονων πολλαπλών συμβάντων με το καθένα να έχει τη δική του διαφορετική πιθανότητα!

Ας προσθέσουμε εδώ και κάτι ακόμα. Χρειάστηκε στην αρχή ένα κόλπο. Το θυμόσαστε; Έπρεπε να σκεφτούμε να υπολογίσουμε την αντίθετη (συμπληρωματική) πιθανότητα. Αλλιώς το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί. Αυτή η μετάθεση του θέματος, σε ένα άλλο (πχ. στο αντίθετό του), είναι πολύ ενδιαφέρουσα και συχνά πρέπει να καταφύγουμε σε τέτοιο ελιγμό.

A.2.1.3 Η σύμπτωση με τον συμπατριώτη.

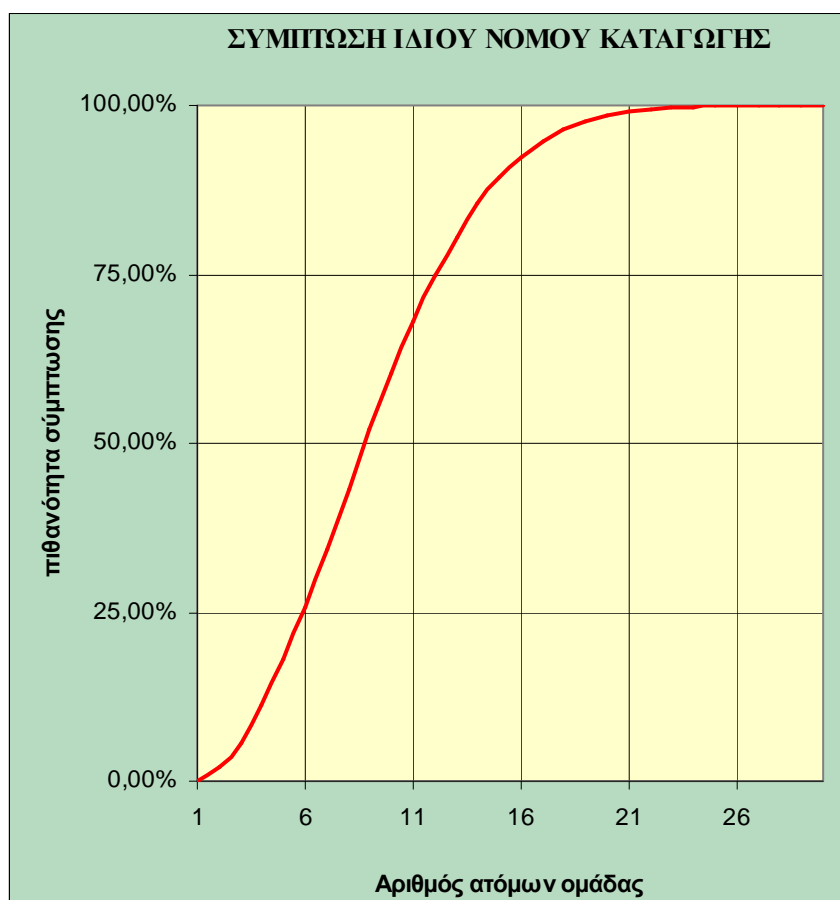
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε συγκεντρωμένη μια τυχαία ομάδα 12 Ελλήνων. Ας παραδεχθούμε επίσης ότι κάθε ένας από αυτούς έχει την ίδια πιθανότητα να κατάγεται από οποιονδήποτε από τους 52 νομούς, με την ίδια πιθανότητα $1/52$.

. Ενστικτωδώς τι θα λέγατε, πόσο είναι πιθανό ή απίθανο να κατάγονται από τον ίδιο νομό, 2 τουλάχιστον άνθρωποι σε αυτή την ομάδα; Πολύ πιθανό; Λίγο πιθανό; Τι πιστεύετε; Αν η ομάδα έχει, ας πούμε 9 ή 21 άτομα, τότε πόσο πιθανή ή απίθανη βρίσκετε αυτή τη σύμπτωση της γενεθλίων; Πολύ; Λίγο;

Σταματήστε για λίγο την ανάγνωση αυτού του κειμένου, σκεφτείτε και προσπαθήστε να δώσετε μια έστω πρόχειρη και διαισθητική εκτίμηση στην απάντηση.

Οι περισσότεροι άνθρωποι, οποιουδήποτε μορφωτικού επιπέδου και αν είναι, πιστεύουν ενστικτωδώς ότι είναι λίγο πιθανό, να συμβεί τέτοια σύμπτωση. Ωστόσο κάνουν μεγάλο λάθος. Γιατί; Ας υπολογίσουμε πρώτα την σωστή απάντηση.

Για να απαντήσουμε με ακρίβεια αυτό το ερώτημα, σκεφτόμαστε ακριβώς όπως και με τη σύμπτωση των γενεθλίων. Παρατηρείστε στο Παράρτημα 2.5, τα επιμέρους βήματα των υπολογισμών. Στα 12 τυχαία άτομα, η πιθανότητα είναι **74,71%**. Απίστευτα μεγάλο ποσοστό. Μάλιστα προσέξτε ότι από τα 9 άτομα η πιθανότητα είναι ήδη πάνω από το μισό (51,97%), ενώ στα 21 άτομα είμαστε πρακτικά σίγουροι (πιθανότητα σύμπτωσης 99,10%). Δείτε και το διάγραμμα που ακολουθεί:



Γιατί αποτυγχάνει παταγωδώς, η διαισθητική ικανότητα προσέγγισης της σωστής λύσης; Η απάντηση είναι ξανά η ίδια. *Ο ανθρώπινος νους δεν μπορεί να συλλάβει διαισθητικά πολλά διαδοχικά βήματα υπολογισμών συνδυασμών και πιθανοτήτων.* Όσο αυξάνονται τα μέλη της ομάδας, τόσο αυξάνονται ραγδαία οι συνδυασμοί. (Δείτε ξανά στο Παράρτημα 2.2 το διάγραμμα που δείχνει πόσο απότομα αυξάνει ο αριθμός των συνδυασμών.) Όπως και πριν, ο ραγδαίος ρυθμός αύξησης, διαφεύγει από το νου μας και τον αναγκάζει να σφάλει. Και το κακό με ένα σύστημα που κάνει λάθος εκτίμηση, δεν είναι μόνο το ίδιο το λάθος. Είναι ότι επιμένει να ισχυρίζεται ότι έχει δίκιο! Φανταστείτε πόσο σοβαρό θα ήταν, αν από αυτή την απάντηση διακυβευόταν ανθρώπινες ζωές!

Ήδη αισθάνομαι πολλούς από εσάς, να προσπαθείτε να επαληθεύσετε όλους τους υπολογισμούς, πεισμένοι από την αντίδραση που προβάλλει ο νους σας. Πιάστε χαρτί και μολύβι, και βυθιστείτε στη σκέψη και τις πράξεις. Είναι η μόνη λύση να πειστείτε!

Σε αυτό το παράδειγμα παραδεχθήκαμε ότι σε μία ομάδα μπορεί να υπάρχουν άτομα με πραγματικά τυχαία καταγωγή. Αυτό έχει κάποια πιθανή απόκλιση από την πραγματικότητα. Στις μεγάλες πόλεις, τα άτομα που ήρθαν από κοντινούς νομούς, μπορεί να έχουν για διάφορους λόγους, μεγαλύτερη συχνότητα. Αυτό θα έχει σα συνέπεια κάποιοι νομοί να εμφανίζονται με μεγαλύτερο ποσοστό. Ωστόσο οι μέσοι όροι για όλη την Ελλάδα, θα κινούνται στα επίπεδα που προβλέψαμε.

A.2.1.4 Η σύμπτωση με τα ίδια μυθιστορήματα.

Στα κλασσικά βιβλιοπωλεία, στο τμήμα βιβλίων των μεγάλων super market, ακόμα και στους πάγκους των εποχιακών βιβλιοπωλείων, παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποιο σημείο όπου εκθέτουν τα βιβλία (συνήθως μυθιστορήματα) με τις μεγαλύτερες πωλήσεις εκείνη την περίοδο. Μοιραία λοιπόν, αυτός που ψάχνει κάποιον ενδιαφέροντα τίτλο για τις διακοπές του, θα σταθεί στο σημείο με τα best sellers και πιθανότατα θα διαλέξει ένα από αυτά. Από προσωπική παρατήρηση, οι συνήθεις εμπορικοί τίτλοι δεν ξεπερνάνε τους 30. Ας υποθέσουμε ότι όλοι οι τίτλοι ευρίσκονται πάντα στη διάθεση του αναγνωστικού κοινού, με την ίδια πιθανότητα 1/30.

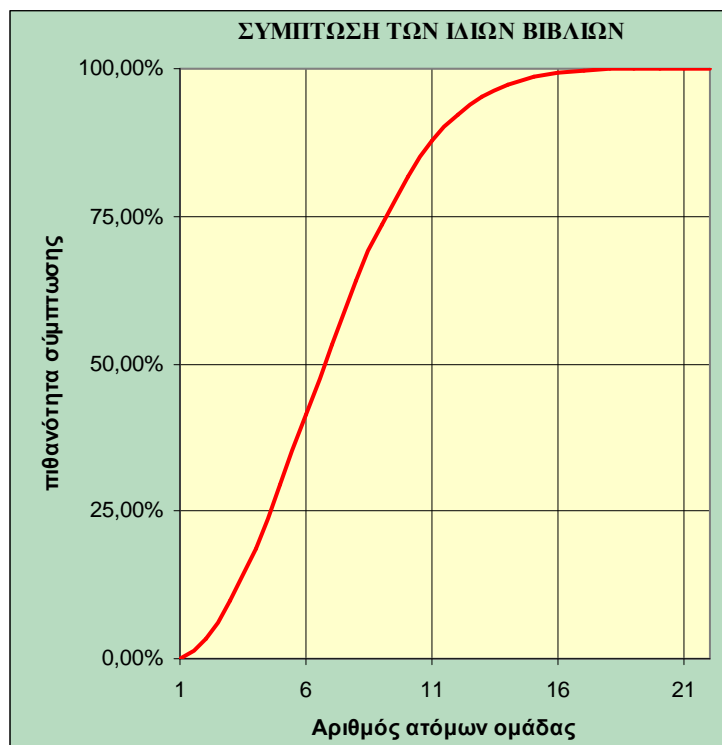
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε λοιπόν μια ομάδα 9 Ελλήνων που συνηθίζουν να διαβάζουν βιβλία, (μια και μιλάμε για την ελληνική αγορά βιβλίου). *Ενστικτωδώς* τι θα λέγατε, *πόσο είναι πιθανό ή απίθανο να έχουν διαβάσει το ίδιο βιβλίο, 2 τουλάχιστον άνθρωποι σε αυτή την ομάδα; Πολύ πιθανό; Λίγο πιθανό; Τι πιστεύετε; Αν η ομάδα έχει, ας πούμε 7 ή 16 άτομα, τότε πόσο πιθανή ή απίθανη βρίσκετε αυτή τη σύμπτωση; Πολύ; Λίγο;*

Σταματήστε για λίγο την ανάγνωση αυτού του κειμένου, σκεφτείτε και προσπαθήστε να δώσετε μια έστω πρόχειρη και διαισθητική εκτίμηση στην απάντηση.

Όπως και με τις προηγούμενες περιπτώσεις συμπτώσεων, οι περισσότεροι άνθρωποι, εκτός από τους μύστες στη λογική των πιθανοτήτων, πιστεύουν

δαισθητικά ότι είναι μάλλον μικρές οι πιθανότητες. Ωστόσο πάλι κάνουν λάθος. Γιατί;

Δείτε το Παράρτημα 2.6. Με την ίδια γνωστή σας πλέον μεθοδολογία, καταλήξαμε ότι στα 9 τυχαία άτομα, η πιθανότητα είναι **73,62%**. Εκτός από εσάς που διαβάζετε αυτό το κείμενο, όλοι οι άλλοι θα εκπλαγούν. Επιπλέον προσέξτε ότι από τα 7 άτομα η πιθανότητα είναι ήδη πάνω από το μισό (53,08%), ενώ στα 16 άτομα είμαστε πρακτικά σίγουροι (πιθανότητα σύμπτωσης 99,29%). Δείτε και το διάγραμμα που ακολουθεί. Η καμπύλη είναι παρόμοιας μορφής με τις υπόλοιπες των συμπτώσεων:



Ως προς την εξήγηση, φυσικά ισχύουν τα ίδια με πριν.

A.2.1.5 Οι συμπτώσεις συνεχίζονται...

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αναλύσουμε, κάνοντας πάντα τις απαραίτητες παραδοχές, όλα τα θέματα συμπτώσεων της καθημερινής ζωής. Συμπτώσεις που αφορούν κινηματογραφικές ταινίες, θεατρικές παραστάσεις, μάρκες αυτοκινήτων, τσιγάρων, εφημερίδες, προσφιλείς τόποι διακοπών και πολλά άλλα, μπορούν να εξηγηθούν όπως τα παραδείγματα που εξετάσαμε παραπάνω.

A.2.2 Η αδυναμία με τις πιθανότητες

A.2.2.1 Το παράδοξο με τις γεννήσεις αγοριών –κοριτσιών.

Όταν πρόκειται για πιθανότητες, το μυαλό μας δεν μας δίνει σχεδόν ποτέ διαισθητικά τη σωστή ένδειξη, ούτε καν κατά προσέγγιση. Δείτε τη συμβαίνει με τις γεννήσεις και το φύλο των παιδιών:

Σε μία μεγάλη πόλη υπάρχουν 2 μαιευτήρια. Ένα μεγάλο και ένα μικρό. Στο μεγάλο μαιευτήριο γεννιούνται κάθε μέρα 45 παιδιά, ενώ στο μικρό, 15 παιδιά. Αν και η τελική αναλογία γεννήσεων είναι 51% αγόρια και 49% κορίτσια, σε κάποια τυχαία ημέρα, η αναλογία αυτή μπορεί να είναι παραπάνω ή παρακάτω.

Στο τέλος του έτους, σε ποιο μαιευτήριο θα υπάρχει ο μεγαλύτερος αριθμός ημερών, κατά τις οποίες οι ημερήσιες γεννήσεις των αγοριών ξεπερνούν το 60% από αυτές των κοριτσιών; Σας ζητάμε να πιθανολογήσετε ποια από τις 3 παρακάτω απαντήσεις είναι σωστές:

1. Στο μεγάλο μαιευτήριο;
2. Στο μικρό μαιευτήριο;
3. Σε κανένα. – Ο αριθμός των ημερών είναι ο ίδιος.

Σε μελέτες που έχουν γίνει, τουλάχιστον 80% των ανθρώπων απαντά ότι σωστή απάντηση είναι η 1 και όπως ήδη θα μαντεύετε κάνει, λάθος! Αλλά από τις υπόλοιπες 2 απαντήσεις ποια είναι η σωστή;

Ας δούμε τα πράγματα με τη σειρά τους. Μεγαλύτερος αριθμός ημερών θα συμβεί στο γεγονός με την μεγαλύτερη πιθανότητα. Άρα πρέπει να εξετάσουμε ποια είναι αυτή η πιθανότητα για το μικρό και το μεγάλο μαιευτήριο.

Οι πιθανότητες με τα φύλα, συνοψίζονται ουσιαστικά σε ένα επαναλαμβανόμενο γεγονός που δέχεται μόνο δύο πιθανές απαντήσεις: ή είναι αγόρι ή δεν είναι (ή βέβαια την ταυτόσημη πιθανότητα ή είναι κορίτσι ή δεν είναι). Σε τέτοιες περιπτώσεις «ναι ή όχι», ο τρόπος να υπολογιστούν τα ερωτήματα της μορφής «πόσες πιθανότητες έχει μια οικογένεια 3 τέκνων να έχει 3 αγόρια» ή «πόσες πιθανότητες έχει μια οικογένεια 5 τέκνων να έχει 4 κορίτσια» κλπ, ο τρόπος υπολογισμού ανάγεται στον τύπο της διωνυμικής κατανομής. Δείτε στο Παράρτημα 2.7 όλες τις σχετικές πράξεις.

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να γεννηθούν περισσότερα από 60% αγόρια, στο μεγάλο μαιευτήριο είναι 8,695% ενώ στο μικρό 16,994%. Με απλό πολλαπλασιασμό επί 365 βρίσκουμε ότι, οι αντίστοιχες ημέρες στο μεγάλο μαιευτήριο είναι 31,74 ενώ στο μικρό 62,03. Άρα απαντήσαμε ότι στο μικρό μαιευτήριο. Γιατί υπάρχει αυτή η μεγάλη διαφορά; Η διαίσθησή μας, έχει την τάση να μας πληροφορήσει εσφαλμένα ότι μάλλον στο μεγάλο νοσοκομείο θα έπρεπε να είχαμε τη μεγάλη πιθανότητα. Το πολύ να λέγαμε ότι έχουν την ίδια πιθανότητα.

Η απάντηση σε αυτή την πλάνη είναι ότι ο νους μας αγνοεί εμπειρικά, ότι υπάρχει ο **νόμος των μεγάλων αριθμών**. Όσο αυξάνεται ο αριθμός των επαναλαμβανόμενων γεγονότων, τόσο αυτά πλησιάζουν πιο απότομα στα όρια της πραγματικής πιθανότητάς τους. Εξίσου φανερό είναι ότι ο νους μας δεν

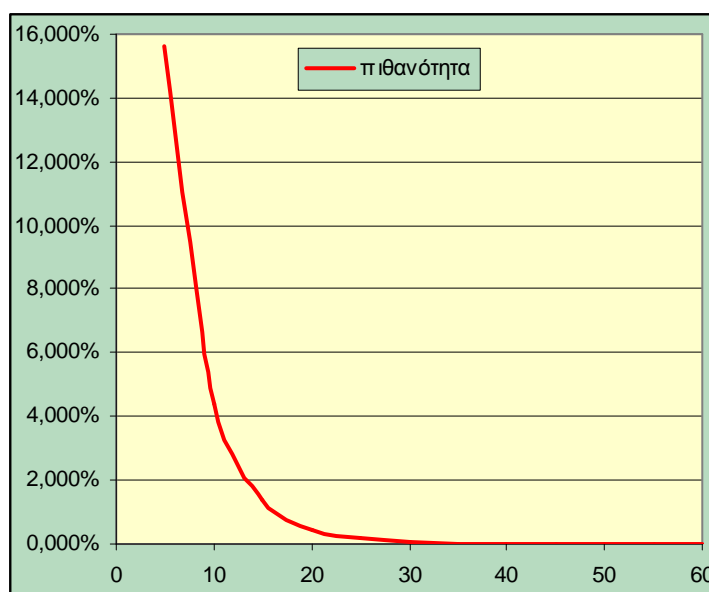
αντιλαμβάνεται σωστά τη φράση «ξεπερνούν το 60%», ούτε και τη διωνυμική κατανομή.

Διαβάστε στη συνέχεια, το επόμενο παράδοξο και θα αντιληφθείτε τι συμβαίνει.

A.2.2.2 Το παράδοξο με το στρίψιμο του νομίσματος.

Ας εξετάσουμε ένα απατηλά απλό παράδειγμα. Θα ασχοληθούμε με το μέτρο της πιθανότητας να έρθει κάποιος συγκεκριμένος αριθμός κεφαλιών σε πολλά διαδοχικά ίδια σετ από στριψίματα ενός ιδανικού νομίσματος.

Αν στρίψουμε ένα νόμισμα 5 διαδοχικές φορές, μπορεί κάλλιστα συμβεί να έχουμε 4 ακριβώς και μόνο συνολικά κεφάλια. Στις 50 όμως φορές, είναι εξαιρετικά απίθανο να συμβεί να έχουμε το ίδιο ποσοστό, δηλαδή ακριβώς και μόνο 40 συνολικά κεφάλια. Όταν πχ ο ρυθμός αύξησης των ρίψεων είναι γραμμικός, τότε ο ρυθμός μείωσης της πιθανότητας να δούμε το ίδιο γραμμικά αυξανόμενο ποσοστό κεφαλιών, πέφτει ραγδαία. Πέφτει διωνυμικά, θα λέγαμε! Δείτε στο Παράρτημα 2.8 τους σχετικούς υπολογισμούς. Ο ρυθμός πτώσης φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Αυτή τη μορφή απότομης πτώσης, δεν μπορεί να την αντιληφθεί ο νους μας. Η πλάνη είναι πλήρης και ολοκληρωτική.

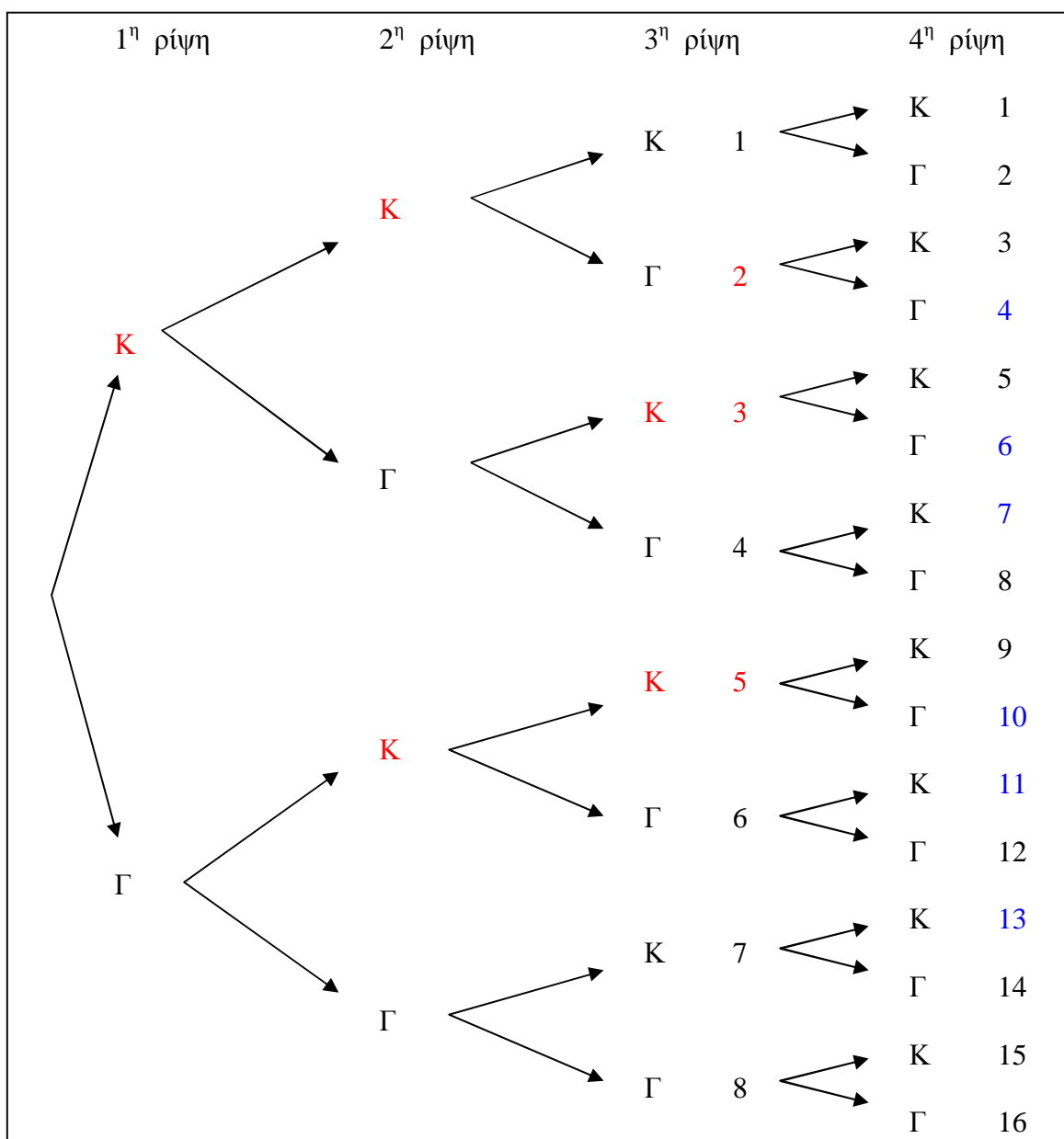
Σας φαίνεται περίεργο αυτό το φαινόμενο; Μήπως αναρωτιέστε αν κάπου κάνουμε λάθος; Τότε που να δείτε και τη συνέχεια:

Ποια είναι η πιθανότητα, αν στρίψουμε ένα νόμισμα 100 διαδοχικές φορές, να έχουμε 50 ακριβώς και μόνο συνολικά κεφάλια; Ήδη θα ψιθυρίζετε τον αριθμό 50%. Αλλά φυσικά κάνετε λάθος. Η σωστή απάντηση είναι 7,959% !

Ποια είναι η πιθανότητα, αν στρίψουμε ένα νόμισμα 10 διαδοχικές φορές, να έχουμε 5 ακριβώς και μόνο συνολικά κεφάλια; Ίσως τώρα να μην ψιθυρίζετε τον αριθμό 50%, αλλά μάλλον τον σκέπτεστε. Αλλά φυσικά κάνετε και πάλι λάθος. Η σωστή απάντηση είναι 24,609% !

Η πιθανότητα, αν στρίψουμε ένα νόμισμα 4 διαδοχικές φορές, να έχουμε 2 ακριβώς και μόνο συνολικά κεφάλια, είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την πιθανότητα, αν στρίψουμε ένα νόμισμα 3 διαδοχικές φορές, να έχουμε πάλι 2 ακριβώς και μόνο συνολικά κεφάλια; Πώς είπατε; Ίδια; Όχι βέβαια, πάλι σας ξεγελάει ο νους σας! Έχουν ακριβώς την ίδια πιθανότητα, ίση με 37,5%. Απίστευτο;

Τι ακριβώς όμως συμβαίνει; Θα χρειαστεί να δείτε το δέντρο με όλα τα πιθανά παρακλάδια του (όλα τα δυνατά αποτελέσματα ρίψεων):



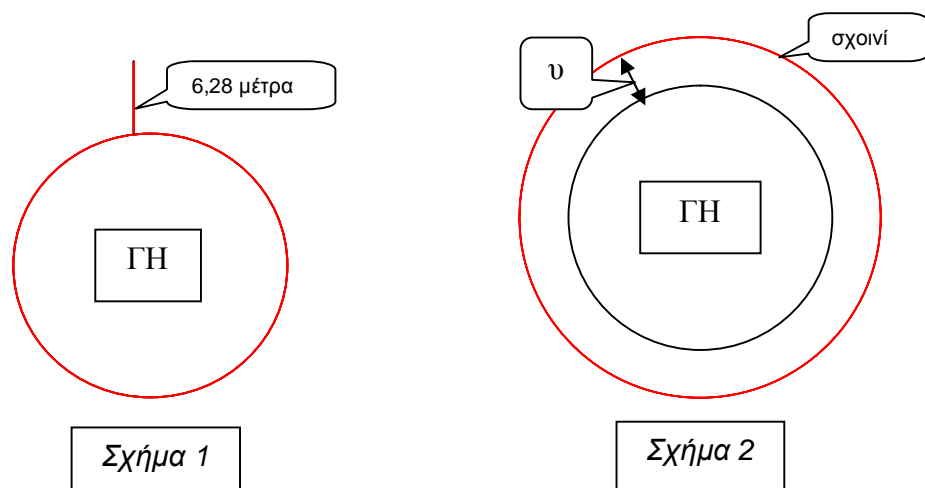
Μέχρι τις 3 ρίψεις, υπάρχουν συνολικά 8 δυνατότητες. Μόνο όμως 3 ρίψεις (οι 2,3,5) έχουν ακριβώς και μόνο από 2 κεφάλια. Άρα $3/8 = 37,5\%$. Εξετάστε τώρα και την 4^η ρίψη. Υπάρχουν 6 ρίψεις (οι 4,6,7,10,11,13) με ακριβώς και μόνο 2 κεφάλια, από συνολικά 16 δυνατότητες. Άρα $6/16 = 37,5\%$. Είτε έχουμε να κάνουμε με σετ τριών στριψιμάτων, είτε τεσσάρων, έχουμε την ίδια πιθανότητα να πετύχουμε ακριβώς και μόνο 2 κεφάλια!

Να είστε ιδιαίτερα προσεκτικοί όταν θέλετε να απαντήσετε ερωτήματα της καθημερινής ζωής, του τύπου «Τι πιθανότητες έχει να συμβεί αυτό το γεγονός, αν κάνω την τάδε ενέργεια». Φυλαχτείτε από ύποπτες φράσεις όπως «τουλάχιστον» και «ακριβώς και μόνο». Το ανθρώπινο μυαλό δεν κατανοεί διαισθητικά τις απαντήσεις σε θέματα πιθανοτήτων. Χρειάζεται απαραίτητα χαρτί, μολύβι και ένα καλό βιβλίο Πιθανοτήτων. Φτιάξτε το σύνολο όλων των δυνατών γεγονότων. Κατανοήστε πολύ ξεκάθαρα, ποια από αυτά σας ενδιαφέρουν να συμβούν. Μετά υπολογίστε την πιθανότητα που σας απασχολεί. Μην την απορρίψετε, αν σας φανεί παράδοξη σε πρώτη ματιά. Ελέγξτε ξανά τις σκέψεις που κάνατε. Είναι στη φύση της έννοιας της πιθανότητας, να είναι μυστήρια!

A.2.3 Η δυσκολία αντίληψης του αριθμού π (3,14159...)

A.2.3.1 Το τύλιγμα της γης.

Ο Wittgenstein συνήθιζε να θέτει στους μαθητές του το παρακάτω ερώτημα: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σφαίρα μεγάλη όσο η γη, με επίπεδη και λεία επιφάνεια. Θέλουμε να τυλίξουμε ένα μακρύ σκοινί, γύρω από τον ισημερινό της. Αλλά το σκοινί που έχουμε, τυχαίνει να την τυλίγει και να περισσεύουν και λίγο πάνω από τα 6 μέτρα (για την ακρίβεια 6,28 μ.)! (Σχήμα 1). Αποφασίζουμε να σηκώσουμε το τυλιγμένο σκοινί, σε κύκλο ομοιόμορφα γύρω από ολόκληρη τη σφαίρα, στο ίδιο ύψος από την επιφάνεια, έτσι ώστε να ενωθούν οι δύο άκρες του. (Σχήμα 2). Έστω $υ$ το ύψος του σκοινιού από την επιφάνεια της σφαίρας.



Ερωτήματα:

1. Πόσο πιστεύετε διαισθητικά, ότι θα είναι περίπου το μέγεθος αυτού του ύψους $υ$; Απειροελάχιστο; Λίγα χιλιοστά; Λίγα εκατοστά; Πολλά εκατοστά; Μισό μέτρο; Λίγα μέτρα;
2. Αν η σφαίρα έχει μέγεθος πολύ μεγαλύτερο, όσο ο ήλιος, τότε το $υ$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο; Πόσο περίπου; Λίγα χιλιοστά; Λίγα εκατοστά; Πολλά εκατοστά; Μισό μέτρο; Λίγα μέτρα;

Σταματήστε για λίγο την ανάγνωση αυτού του κειμένου, σκεφτείτε και προσπαθήστε να δώσετε μια έστω πρόχειρη εκτίμηση στην απάντηση.

Λάθος! Αν απαντήσατε όπως όλοι οι άνθρωποι, ότι : 1) το ύψος πρέπει να είναι κάποιο μάλλον μικρό έως πολύ μικρό μέγεθος και 2) Σε πολύ μεγαλύτερη σφαίρα, το ύψος θα είναι πολύ μικρότερο, τότε πάλι σας πρόδωσε ο εγκέφαλός σας.

Η σωστή απάντηση είναι ότι σε οποιοδήποτε μεγέθους σφαίρα, το ύψος θα είναι πάντα ένα (1) μέτρο.

Η απάντηση είναι απλούστατη: Αν $ρ$ η ακτίνα της σφαίρας και $υ$ το ζητούμενο ύψος, τότε:

$$\begin{aligned} \text{Περιφέρεια σχοινιού} - \text{Περιφέρεια σφαίρας} &= 6,28 \Rightarrow \\ 2\pi(\rho+υ) - 2\pi\rho &= 6,28 \Rightarrow 2\pi\rho+2\piυ - 2\pi\rho = 6,28 \Rightarrow 2\piυ=6,28 \Rightarrow \\ υ &= 6,28 / 2\pi. \Rightarrow (\text{επειδή } \pi \approx 3,14) υ= 6,28 / 2*3,14 \Rightarrow υ= 6,28/6,28 \\ &\Rightarrow \mathbf{υ = 1} \end{aligned}$$

Αυτό που συμβαίνει με το νου μας, είναι ότι δεν κατανοεί διαισθητικά πόσο είναι το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου, σχετικά με την ακτίνα του κύκλου. Αλλά δεν φτάνει που δεν το κατανοεί, δεν μας ειδοποιεί κιόλας! Αντίθετα, εστιάζει εσφαλμένα στη διαφορά δύο πολύ άνισων μεγεθών (από τη μια την περιφέρεια της γης και από την άλλη τα 6,28 μέτρα του προβλήματος), οπότε μας προτείνει τελείως λάθος αποτελέσματα.

Ιδιαίτερα κακή συμπεριφορά από ένα τόσο ευγενές και πολύπλοκο όργανο!

A.2.3.2 Ο μυστηριώδης αριθμός π .

A.2.4 Η δυσκολία αντίληψης του απείρου

A.2.5 Η δυσκολία αντίληψης του μηδέν.

A.2.6 Τα αινιγματικά φαινόμενα *déjà vu*, *déjà vécu*, *déjà senti* κλπ.

A.2.7 Η ψυχιατρική εξήγηση των «μεταφυσικών» φαινομένων.

A.2.8 Σοφιστείες και Γκοντελιανά παράδοξα : Συνέπεια ή Πληρότητα;

“ ρῆτες ἀεὶ ψεύσται”

Επιμενίδης ο Κρητικός, 6^{ος} αιώνας π.Χ.

Θα έχετε ίσως ακούσει αυτό το ευφρολόγημα (ή κάποια παραλλαγή του):

Ένας Κρητικός, ισχυρίζεται ότι: - “Οι Κρητικοί λένε πάντα ψέματα”. Αλλά αφού είναι και ο ίδιος Κρητικός, θα είναι ψέματα και η φράση που μόλις είπε. Δηλαδή στην πραγματικότητα οι Κρητικοί λένε πάντα αλήθεια. Άρα η φράση που μόλις είπε θα είναι αληθινή. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι είναι αλήθεια, ότι “Οι Κρητικοί λένε πάντα ψέματα”. Με απλά λόγια είναι πάντα ψεύτες. Έτσι ξαναγυρίσαμε εκεί που ήμασταν!

Τι είναι τελικά αυτή η φράση; Αληθής ή ψευδής;

Ενώ πρόκειται φαινομενικά για μια απλή ερώτηση, τελικά αντιλαμβανόμαστε ότι πρόκειται για μια αδιέξοδη νοητική παγίδα. Τι πραγματικά συμβαίνει; Γιατί δεν αντιλαμβανόμαστε ξεκάθαρα πια είναι η σωστή απάντηση; Γιατί ο νους μας κλωθογυρίζει καθηλωμένος στο ίδιο σημείο;

Αυτή η ρήση του Επιμενίδη, αναφέρεται σε αρκετά γραπτά κείμενα μέχρι σήμερα (ακόμα και στην Αγία Γραφή¹), δείχνοντας ότι υπάρχει κάτι το ιδιαίτερο επάνω της, το οποία απασχολεί διαχρονικά τον άνθρωπο. Ας παραβλέψουμε κάποιες απλοϊκές ερμηνείες πχ. ότι εννοούσε πως μόνον ο ίδιος ο Επιμενίδης έλεγε αλήθεια και όλοι οι υπόλοιποι Κρητικοί ψέματα, ή ότι δεν μπορεί ένας άνθρωπος να λέει ταυτόχρονα αλήθεια και ψέματα μαζί.

Η ουσία του θέματος αρχίζει από την κατανόηση ότι αυτό που συμβαίνει είναι πως, αυτή η φράση είναι **αυτό-αναφερόμενη**. Το αντικείμενο αυτής της φράσης (το κατηγορημα) αφορά και την ίδια τη φράση. Η κυκλική σκέψη, οδηγεί σε φαύλο κύκλο. Από τον Αριστοτέλη όμως ήδη γνωρίζουμε, ότι οι *κυκλικές αναφορές* δεν επιλύουν προβλήματα.

Η φράση του Επιμενίδη (αν και ο ίδιος δεν ασχολήθηκε με τέτοιες σκέψεις γιατί ήταν ποιητής!), κατέληξε να καταταχτεί σαν επίσημο φιλοσοφικό και μαθηματικό παράδοξο², σε μια ευρύτερη οικογένεια παραδόξων, τα *λεγόμενα παράδοξα του ψεύτη*.

Η Μίλητος της Μικράς Ασίας, ήταν το λίκνο του Αρχαιοελληνικού πολιτισμού. Η σχολή των φιλοσόφων της Μιλήτου, χάραξε το δρόμο της αναζήτησης της υπέρτατης αλήθειας. Είναι φυσικό λοιπόν να απαντάμε εκεί, την παλαιότερη επίσημη φιλοσοφική έκδοση του παράδοξου *του ψεύτη*, που αποδίδεται στον ελληνικό φιλόσοφο Ευβουλίδη τον Μιλήσιο, ο οποίος έζησε στον 4^ο αιώνα π.Χ. Σύμφωνα με τις υπάρχουσες πληροφορίες, αυτός δήλωνε:

- “Ένα άτομο λέει ότι ψεύδεται. Λέει αλήθεια ή ψέματα;”

¹ Πράξεις των Αποστόλων, Επιστολή προς Τίτο, 1:12

² Bertrand Russell, 1908, "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", *American Journal of Mathematics*, v30, n3, [222-262]

Παραλλαγές πάνω στο ίδιο θέμα, είναι και οι παρακάτω μεταγενέστερες προτάσεις:

- “Ψεύδομαι.”
- “Αυτή η δήλωση είναι ψεύτικη.”
- “Αυτή η δήλωση δεν είναι αληθινή.”

Αναλύοντας αυτές τις προτάσεις, βήμα – βήμα, και χωρίς να υπάρχει κάποιο ενδιάμεσο λογικό σφάλμα, αντιλαμβανόμαστε ότι εμπειριέχουν παρεμφερή ασάφεια με το παράδοξο του Επιμενίδη. Η συνεχιζόμενη στο άπειρο εναλλαγή της ίδιας έννοιας και της αντίθετής της, μπλοκάρουν την κατανόησή μας.

Σε ένα παραπλήσιο χώρο λογικού αδιεξόδου, κινείται και η γνωστή Σωκρατική ρήση:

- “*Εν οίδα ότι ουδέν οίδα*” !³

Σπουδαίοι τεχνίτες του αμφίβολου και διφορούμενου λόγου, ήταν οι **Σοφιστές**, ένα μεγάλο φιλοσοφικό ρεύμα της κλασσικής περιόδου (5ος αιώνας π.Χ.) μελέτησαν με επαγγελματική ευσυνειδησία, την έννοια και τη φύση του λεκτικού παράδοξου. Δίδασκαν έναντι πολλών χρημάτων (σε αντίθεση με τον Σωκράτη που δεν έπαιρνε χρήματα για την διδασκαλία του), φιλοσοφία, λογική, επιστήμες, ρητορική και πολιτική. Ονομαστοί σοφιστές, που έδρασαν κυρίως στην Αθήνα, ήταν ο Πρωταγόρας, ο Γοργίας, ο Ιππίας, ο Πρόδικος, Θρασύμαχος, ο Αντιφώντας κ. α.

Η συνεισφορά τους στην ανθρώπινη νόηση είναι πολύ αξιόλογη. Με την πρωτοποριακή σκέψη τους, άνοιξαν το δρόμο σε πολλούς νέους κλάδους διανόησης, που παραμένουν και σήμερα αντικείμενο μελέτης. Ανάμεσα στους τομείς που χάραξαν, είναι:

- *Ο ανθρωποκεντρισμός*: πρωταρχικό ενδιαφέρον είναι ο άνθρωπος και ο τρόπος που διαρθρώνεται η ύπαρξή του με τον έξω κόσμο, η μελέτη του κόσμου με βάση τις αισθήσεις.
- *Η γνωσιολογία*: η μελέτη των τρόπων που αποκτάται η γνώση και αν υπάρχει αντικειμενική δυνατότητα γνωριμίας του κόσμου.
- *Ο αγνωστικισμός*: θεωρία που πρεσβεύει ότι είναι αδύνατη η πραγματική γνώση της ουσίας των όντων και της αρχής και αλήθειας του κόσμου.
- *Ο υλισμός*: άποψη πως αρχή του κόσμου είναι η ύλη. Στρέφονταν συχνά στην φύση για να βρουν επιχειρήματα για τις απόψεις τους και δεν πίστευαν στην υπερφυσική θεϊκή δύναμη.
- *Ο σχετικισμός*: η άποψη ότι η γνώση και η αλήθεια είναι σχετική και υποκειμενική.
- *Η λογική*: ξαφνιάζει που οι σοφιστές ασχολήθηκαν με τη λογική, αλλά είναι αλήθεια ότι στοχάστηκαν ιδιαίτερα σε νέες μεθόδους όπως η σύγκριση, η παρατήρηση και η επαγωγή (τη συναγωγή γενικού συμπεράσματος από πολλές επιμέρους απόψεις).
- *Η ρητορική* : η τέχνη της πειθούς. Σκοπός τους ήταν, να πείσουν τους άλλους και να επιβάλουν την άποψή τους. Άξιος είναι αυτός που “τὸν ἦττω λόγον κρείττω ποιεῖν”.

³ “ένα ξέρω, ότι δεν ξέρω τίποτα” !

- *Η εριστική*: η τεχνική της αναίρεσης των επιχειρημάτων του συνομιλητή.

Αφού σύμφωνα με τις πεποιθήσεις τους, η αλήθεια είναι σχετική και υποκειμενική, τότε όλα επιτρέπονται στο λόγο: συχνά αντί να πείθουν, έφταναν να παρουσιάζουν τον μείζονα λόγο ελάσσονα και το αντίστροφο. Δηλαδή, κάποιο σημαντικό θέμα το παρουσίαζαν ως ασήμαντο και τανάπαλιν. Επέλεγαν τις απόψεις που τους συνέφεραν για να πείσουν τους άλλους. Αυτό είχε ως συνέπεια να μην επιχειρηματολογούν με αντικειμενικότητα. Αυτό ακριβώς γίνεται από τους περισσότερους ανθρώπους σήμερα. Οι σοφιστές, θυμίζουν ιδιαίτερα τους δικηγόρους και τους πολιτικούς της εποχής μας!

Ο μεγαλύτερος σοφιστής και από τους μεγαλύτερους φιλοσόφους της αρχαιότητας ήταν ο Πρωταγόρας από τα Άβδηρα της Θράκης (480 – 411 π.Χ.). Με τον Πρωταγόρα εισάγεται το ρεύμα του σχετικισμού και του υποκειμενισμού στην φιλοσοφία. Πίστευε ότι η γνώση δεν προσδιορίζεται αντικειμενικά, αλλά με τις αισθήσεις. Άρα, γνώση είναι ότι αντιλαμβανόμαστε, ότι αποτυπώνεται στις αισθήσεις μας. Εισήγαγε και την έννοια του “ανθρωποκεντρισμού”, λέγοντας ότι...: “*πάντων χρημάτων μέτρον άνθρωπος*”. Η έκφραση αυτή σημαίνει ότι ο άνθρωπος αποτελεί μέτρο της αληθείας και της γνώσης και γι’ αυτό κάθε υποκειμενική άποψη για κάποιο θέμα έχει την αξία της. Ο Πρωταγόρας ήταν πρωτοπόρος μελετητής της Γραμματικής και της Ετυμολογίας. Σε ένα πέρασμα στις “Νεφέλες”, ο Αριστοφάνης λέει, ότι οι σοφιστές μπορούν να κλίνουν ακόμα και το θηλυκό της λέξης κόκορας : “*ὁ αλεκτριῶν - ἡ αλεκτρούαινα*”!!! Οι απόψεις του όμως σκανδάλισαν τους Αθηναίους. Τα βιβλία του Πρωταγόρα κήκαν δημοσίως στην αγορά (όπως έκανε η Ιερά Εξέταση και ο Χίτλερ) και ο ίδιος καταδικάστηκε για αθεΐα. Για να αποφύγει τα χειρότερα ο Πρωταγόρας διέφυγε με πλοίο προς τη Σικελία. Όμως το πλοίο ναυάγησε και ο ίδιος πνίγηκε.

Άλλος μεγάλος σοφιστής ήταν ο Γοργίας (483 – 385 π.Χ.) από τους Λεοντίνους (ελληνική αποικία στη Σικελία). Ο Γοργίας έλεγε ότι τα πάντα στην φύση είναι μια εγκεφαλική κατασκευή, μια απάτη των ανθρωπίνων αισθήσεων. Έτσι, και η γνώση για τον κόσμο είναι αδύνατη. Οι ανθρώπινες αισθήσεις δεν επιτρέπουν την γνωριμία με την αντικειμενική πραγματικότητα, αν υποθετικά υπάρχει αυτή. Κατά τον Γοργία:

1. δεν υπάρχει αντικειμενική πραγματικότητα,
2. αν υπήρχε αντικειμενική πραγματικότητα, ουδείς θα το γνώριζε,
3. ακόμα και να το γνώριζε, δεν θα μπορούσε να το διδάξει στους υπολοίπους!!!

Έτσι, λοιπόν, κάθε γνώση είναι σχετική και όχι απόλυτη. Ο Γοργίας έγραψε μάλιστα ένα βιβλίο όπου αποδεικνύει τα παραπάνω, με τον απίστευτο τίτλο “*Περὶ τοῦ μὴ ὄντος*”!!! Με σαφείς επιρροές από το Ζήνωνα τον Ελεάτη, έχει προβληματίσει τους ειδικούς: Ή είναι ο πρόδρομος του Νιχιλισμού, ή είναι ο μεγαλύτερος ιδεολογικός φαρσέρ!

Ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης, πίστευαν τα αντίθετα. Έκαναν μεγάλη προσπάθεια για να τους αντικρούσουν. Υποβίβασαν με εμπάθεια, την έννοια του “σοφισμού” σε “φτηνό κόλπο”. Οι γνώσεις μας για τους σοφιστές είναι έμμεσες και

αποσπασματικές, και κάτι χειρότερο, είναι συχνά παραπονημένες από αυτούς τους δύο αντιπάλους. Και δεν είναι τούτο απροσδόκητο, όταν πρόκειται για στοχαστές που έθιξαν προβλήματα συνδεδεμένα με την ανθρώπινη φύση, τη συμπεριφορά και τις κοινωνικές αντιδικίες του καιρού τους. Ο Πλάτωνας (κυριότερη πηγή μας) στους διάλογούς του (Πρωταγόρας, Γοργίας, Σοφιστής και άλλους) άμεσα και έμμεσα εκθέτει τις απόψεις των σοφιστών, με κύριο σκοπό του όμως να τις ανασκευάσει και συνήθως αναδεικνύει ήρωα της πνευματικής πάλης το Σωκράτη. Όμως οι σοφιστές έκαμαν κέντρο του φιλοσοφικού στοχασμού (και της διδασκαλίας τους) τον άνθρωπο, άφησαν επιδεικτικά το «Είναι και το Γίνεσθαι» της φύσης και καταπιείστηκαν με τη γνωστική ικανότητα του ανθρώπου, την καθημερινή δράση του στην κοινωνία. Έφεραν έναν Ελληνικό Διαφωτισμό.

Ο άνθρωπος διαισθητικά έχει την τάση να πιστέψει ότι, ανάμεσα στην αλήθεια και το ψέμα, δεν υπάρχει χώρος για κάτι άλλο. Ωστόσο οι διαφορούμενες προτάσεις των παραδόξων, δεν μπορεί να είναι ούτε αληθείς, ούτε ψευδείς. Πολλοί φιλόσοφοι της Λογικής, προσπάθησαν να δώσουν κάποια ολοκληρωμένη εξήγηση στο φαινόμενο του *παράδοξου του ψεύτη*. Είναι δύσκολο να χτίσεις ένα στέρεο φιλοσοφικό ή μαθηματικό οικοδόμημα, όταν τέτοια λογικά αδιέξοδα, του ροκανίζουν τα θεμέλια. Κορυφαίοι μαθηματικοί και φιλόσοφοι του 20^{ου} αιώνα, όπως οι Bertrand Russell, A. N. Whitehead, and David Hilbert, προσπάθησαν μάταια να στηρίξουν τα θεμέλια των Μαθηματικών, χρησιμοποιώντας τη Λογική και τη Θεωρία Συνόλων. Η απροσδόκητη απάντηση δόθηκε τελεσίδικα από τον Αυστριακό Kurt Gödel⁴.

Ελάχιστοι άνθρωποι σε κάθε αιώνα, καταφέρνουν να πλήξουν καιρία την εφησυχασμένη σιγουριά μας, σχετικά με τα όρια της ανθρώπινης νόησης και

⁴ Kurt Gödel : [28/4/1906 στο Brno, τότε Αυστρία-Ουγγαρία, τώρα Τσεχία - 14/01/1978 στο Princeton, New Jersey, Η.Π.Α.]

Πρόκειται για μία από τις πιο σπάνιες μορφές ανθρώπινης ιδιοφυΐας. Η περιέργειά του ήταν τόσο έντονη και μεγάλη, ώστε η μητέρα του τον αποκαλούσε “ο κύριος Γιατί”. Στα 18, κατείχε πλήρως όλες τις πανεπιστημιακού επιπέδου μαθηματικές γνώσεις, και είχε μελετήσει τα γραπτά του Νεύτωνα, του Κάντ και του Γκαίτε.

Στα τέλη της δεκαετίας του 1940, απέδειξε ότι υπήρχαν κάποιες παράδοξες λύσεις στις εξισώσεις της Γενικής Σχετικότητας του Αϊνστάιν. Αυτές επέτρεπαν την ύπαρξη πολλαπλών περιστρεφόμενων συμπάντων και το ταξίδι μέσα στο χρόνο! Τα νέα αυτά δεδομένα, συγκλόνισαν τον Αϊνστάιν, ο οποίος μη όντας μαθηματικός, άρχισε να έχει αμφιβολίες για την ορθότητα της ίδιας του της θεωρίας! Ωστόσο δεν υπήρχε κανένα πρόβλημα με τη Γενική Σχετικότητα του Αϊνστάιν. Απλά ο Gödel είχε δίκιο. Είχε καταφέρει να δει, πέρα και πάνω από τη ματιά, του ευφυέστερου ανθρώπου στη γη.

Η μνημειώδης φιλία του Αϊνστάιν με τον Gödel, επιστεγαζόταν από καθημερινούς περιπάτους στοχασμού. Παραμένει μυστήριο σε ποια μακρινά μονοπάτια διάνοησης περιδιάβαιναν οι δύο τους. Αυτό που όντως γνωρίζουμε, είναι ότι στα βαθιά γεράματα ο Αϊνστάιν, είπε στον καθηγητή Οικονομίας Oskar Morgenstern, ότι “... ήρθα στο Princeton για να έχω την τιμή να περπατάω παρέα με τον Gödel!”

Αυτό το λαμπρό πνεύμα, ήταν ωστόσο βαθιά διαταραγμένο διανοητικά. Ήταν ντροπαλός, αρρωστιάρης, εκκεντρικός και αλλόκοτος. Στα μέσα του καλοκαιριού, κυκλοφορούσε με χοντρά χειμωνιάτικα ρούχα. Μέσα στο καταχείμωνο, άφηνε τα παράθυρα ανοιχτά, πιστεύοντας ότι έτσι θα γλιτώσει από τα χημικά αέρια που του έβραζαν οι συνωμότες. Έτρωγε μόνο το φαγητό που του ετοίμαζε η σύζυγός του, η Adele, γιατί φοβόταν πως κάποιοι ήθελαν να τον δηλητηριάσουν.

Όταν κατάπεσε από ασθένεια η Adele και δεν μπορούσε πια να του μαγειρέψει, ο Gödel έπαψε να τρώει και πέθανε από ασιτία.

αντίληψης. Κάθε άποψη που αντιτίθεται σε αυτά που πρωτογενώς και διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε, γίνεται αποδεκτή με μεγάλη δυσκολία. Ο ανθρώπινος ναρκισσισμός, υποδαυλιζόμενος από το κοινωνικό σύστημα κάθε εποχής, έχει μάλλον την τάση να επαναπαύεται στο θαυμασμό της πληρότητας της αντίληψης που έχει για τα πράγματα. Αλλά ευτυχώς, πάντα κάποιοι κατορθώνουν να δουν πίσω από τους φράχτες. Επειδή αυτά που βλέπουν, κλονίζουν ή ακόμα και γκρεμίζουν όσα πιστεύαμε μέχρι πριν, τα βιώνουμε σαν χτυπήματα στο συλλογικό εγωισμό μας. Τελικά και ύστερα από τις σχετικές διαμάχες, οι νέες γνώσεις γίνονται αποδεκτές και ενσωματώνονται στον ανθρώπινο πολιτισμό.

Τέτοια ισχυρά ναρκισσιστικά πλήγματα, κατάφερε ο Γαλιλαίος, ο Freud, ο Δαρβίνος, ο Einstein και ο **Kurt Gödel**. Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στα θεωρήματα της «μη πληρότητας» του Gödel. Πρόκειται για μια εκπληκτική ανακάλυψη της μαθηματικής Λογικής, με πολλές και βαθιές συνέπειες στην φιλοσοφία, στα μαθηματικά και στην ανθρώπινη κατανόηση. Η ιδιαίτερα δύσκολη φύση του θέματος, το καθιστά δυσνόητο και απρόσιτο στους αμήτους. Ωστόσο, και σε βάρος της αυστηρής μαθηματικής έκφρασης, θα προσπαθήσουμε να το κάνουμε κατανοητό, σε απλή ελληνική γλώσσα. Αξίζει κάθε δευτερόλεπτο της προσοχής που θα του αφιερώσουμε, γιατί φωτίζει ένα σκοτεινό χώρο στον τομέα της ανθρώπινης πλάνης. Θα χρειαστεί να κάνετε λίγο υπομονή, κατανοώντας πρώτα την απαραίτητη θεωρία. Ύστερα θα αντιληφθείτε αυτόματα τη σύνδεση με το θέμα του ανθρώπινου εγκέφαλου. Η ματιά σας στον κόσμο, δεν θα είναι ποτέ πια ίδια με αυτήν που είχατε, πριν την κατανόηση αυτού του κεφαλαίου!

Πρώτο Θεώρημα περί «μη πληρότητας»

Το πρώτο θεώρημα της «μη πληρότητας» του Kurt Gödel είναι ίσως το πιο φημισμένο αποτέλεσμα στη μαθηματική λογική. Δηλώνει ότι:

Για οποιαδήποτε συνεπή επίσημη θεωρία που αποδεικνύει τις βασικές αριθμητικές αλήθειες, είναι δυνατό να κατασκευαστεί μία αριθμητική πρόταση που να είναι αληθινή αλλά μη αποδείξιμος μέσα σε αυτή τη θεωρία. Δηλαδή οποιαδήποτε θεωρία ικανή να θεμελιώνει τη στοιχειώδη αριθμητική δεν μπορεί να είναι και συνεπής και πλήρης.

Ας αποσαφηνίσουμε αρχικά τις παραπάνω έννοιες:

- "Συνεπής" είναι μια θεωρία, εάν δεν αποδεικνύει ποτέ μια αντίφαση.
- "Θεωρία" αναφέρεται σε ένα οποιοδήποτε σύνολο προτάσεων, από τις οποίες:
 1. μερικές θεωρούνται σαν αληθινές χωρίς απόδειξη (αυτές καλούνται αξιώματα), και
 2. οι υπόλοιπες (που καλούνται θεωρήματα) λαμβάνονται σαν αληθινές, επειδή είναι αποδείξιμες από τα αξιώματα.

§ "Είναι δυνατό να κατασκευαστεί" σημαίνει ότι υπάρχει κάποια μηχανική

διαδικασία που μπορεί να κατασκευάσει την πρόταση, λαμβάνοντας υπόψη τα αξιώματα, τις βασικές έννοιες, και την Λογική πρώτης τάξης⁵. Η προκύπτουσα πρόταση αναφέρεται συχνά ως "**πρόταση Gödel ή γκοντελιανή πρόταση**" για εκείνη την θεωρία. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν απείρως πολλές προτάσεις στη θεωρία, που μοιράζονται με την πρόταση Gödel την ιδιότητα να είναι αληθινές αλλά μη αποδείξιμες από τη θεωρία.

- § "Αποδείξιμος μέσα σε αυτή τη θεωρία" σημαίνει "παράγωγο από τα αξιώματα και τις βασικές έννοιες της θεωρίας, χρησιμοποιώντας την τυποποιημένη Λογική πρώτης τάξης."
- § "Στοιχειώδης αριθμητική" εννοούμε αυτήν που αποτελείται μόνο από την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό στους φυσικούς αριθμούς.

Υπάρχουν ακόμη μερικές τεχνικές υποθέσεις: η σημαντικότερη είναι ότι η θεωρία πρέπει να είναι *αριθμήσιμη υπολογιστικά*. Δηλαδή για να ισχύσει το πρώτο θεώρημα του Gödel, πρέπει να είναι δυνατό να γραφτεί ένα πρόγραμμα υπολογιστών που, εάν επιτρέπεται να τρέξει για πάντα, θα:

- Αποδείκνυε όλα τα θεωρήματα της θεωρίας και τίποτα άλλο.
- Αποφάσιζε εάν οποιαδήποτε πρόταση είναι μια περίπτωση αντικατάστασης ενός αξιώματος της θεωρίας.

Χοντρικά, η "πρόταση γ του Gödel", μπορεί να εκφραστεί έτσι:

"η πρόταση γ δεν μπορεί να αποδειχθεί αληθινή".

Μια πρόχειρη απόδειξη σε απλά ελληνικά (και όχι από αυστηρή μαθηματική άποψη) είναι η εξής:

Εάν η γ μπορούσε να αποδειχθεί αληθινή κάτω από τα αξιώματα της θεωρίας, τότε η θεωρία θα είχε ένα θεώρημα, δηλαδή το ίδιο το γ, το οποίο θα ερχόταν σε αντίθεση με τον εαυτό του.

Μια παρόμοια αντίφαση θα εμφανιζόταν εάν η γ μπορούσε να αποδειχθεί ψευδής:

Εάν η γ μπορούσε να αποδειχθεί ψευδής κάτω από τα αξιώματα της θεωρίας, τότε η θεωρία θα είχε ένα θεώρημα, δηλαδή το ίδιο το γ, το οποίο θα ερχόταν πάλι

⁵ Η Λογική πρώτης τάξης (*first order logic*), είναι ένα από τα νεότερα συστήματα θεμελίωσης και επέκτασης της κλασσικής προτασιακής Λογικής. Η Αριστοτέλειος Λογική (ή συλλογιστική) ήδη από το μεσαίωνα έδειξε ότι αδυνατούσε να θεμελιώσει τα μαθηματικά και την επιστημονική σκέψη. Αναπτύχθηκαν λοιπόν αυστηρότερα συστήματα Λογικής, τα οποία χρησιμοποιούν συγκεκριμένα σύμβολα και κανόνες για να εκφράσουν έννοιες όπως επαγωγή, συνεπαγωγή, αλγόριθμος, προσδιορισσιμότητα, αποδειξιμότητα κλπ. Η Λογική πρώτης τάξης, επεκτάθηκε από τη προτασιακή Λογική, με τη χρήση των ποσοδεικτών \exists (υπάρχει) και \forall (για κάθε) και τον Κατηγορηματικό Λογισμό, δηλαδή τον υπολογισμό των κατηγορημάτων πχ. $\exists x[Qx] \equiv \sim \forall x[\sim Qx]$. Ο τρόπος που γράφεται μια πρόταση είναι για παράδειγμα έτσι: "αν $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ", και διαβάζεται έτσι: «αν από το P προκύπτει το Q, και από το Q προκύπτει το P". Το ίδιο σε συντομογραφία μπορεί να γραφτεί έτσι: $(P \leftrightarrow Q)$. Πρόκειται ουσιαστικά για την εισαγωγή μιας νέας αυστηρής, ευδιάκριτης και σαφούς γλώσσας, η οποία δεν επιτρέπει σε λάθη και ασάφειες να παρεισφρήσουν στη σκέψη. Η μετάβαση από την προτασιακή λογική, στη Λογική πρώτης τάξης με τη χρήση *τύπων (forms)*, πυροδότησε τις εξελίξεις στο επιστημονικό στερέωμα. Πρωτεργάτης αυτού του κινήματος της καθολικής Τυποποίησης (Formalism - Φορμαλισμός) ήταν ο Hilbert.

σε αντίθεση με τον εαυτό του, αφού αν η γ δεν μπορεί να αποδειχθεί αληθής, τότε φυσικά δεν μπορεί να αποδειχθεί ούτε ψευδής.

Έτσι αναγκαζόμαστε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η γ **δεν μπορεί να αποδειχθεί** ούτε αληθής ούτε ψευδής, αλλά είναι αληθινή και ισχύει λόγω αυτού του ίδιου του γεγονότος.⁶

Η αυστηρή μαθηματική απόδειξη που έδωσε ο Gödel, αφορά την θεωρία των αριθμών. Κατέδειξε την «μη πληρότητα» μιας θεωρίας της αριθμητικής, αλλά είναι σαφές ότι η απόδειξη θα μπορούσε να δοθεί και να ισχύει για οποιασδήποτε θεωρία και γλώσσα μιας ορισμένης εκφραστικότητας.

Σαν να μην έφτανε το πρώτο δυνατό αυτό χτύπημα στην λογική χιλιετηρίδων της ανθρωπότητας, ο Gödel απέδειξε και το...

Δεύτερο θεώρημα περί «μη πληρότητας»

Αυτό μπορεί να δηλωθεί ως εξής:

Αν Θ είναι μία οποιαδήποτε επίσημη θεωρία που περιλαμβάνει βασικές αριθμητικές αλήθειες και επίσης ορισμένες αλήθειες για την επίσημη αποδειξιμότητα, τότε: η Θ περιλαμβάνει μια πρόταση ότι η ίδια είναι συνεπής, εάν και μόνο εάν, η Θ είναι ασυνεπής.

Μια πρόχειρη απόδειξη σε απλά ελληνικά, είναι η εξής:

1. Απόδειξη του όρου "εάν":

• εάν η Θ είναι ασυνεπής, τότε οτιδήποτε μπορεί να αποδειχθεί, συμπεριλαμβανομένου και του ότι η Θ είναι συνεπής.

1. Απόδειξη του όρου "μόνο εάν":

• εάν η Θ είναι συνεπής τότε η Θ δεν περιλαμβάνει την πρόταση της συνέπειάς της. Αυτό προκύπτει από το πρώτο θεώρημα.

Το δεύτερο θεώρημα «μη πληρότητας» του Gödel υπονοεί επίσης ότι :

Μία θεωρία $\Theta 1$ (που ικανοποιεί τους τεχνικούς όρους που περιγράφονται παραπάνω), δεν μπορεί να αποδείξει τη συνέπεια οποιασδήποτε θεωρίας $\Theta 2$, η

⁶ Σε ηλικία 25 ετών, ο Gödel εμφανίζει το θεώρημά του, ως πρόταση VI στο έγγραφο του:

Kurt Gödel, 1931, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. Monatshefte für Mathematik und Physik* 38: 173-98. που μεταφράστηκε στα Αγγλικά: "On Formally Undecidable Propositions in Principia Mathematica and Related Systems I." Το δηλώνει έτσι:

“Σε κάθε ω -συνεπή επαναλαμβανόμενη τάξη κ από τύπους, αντιστοιχούν επαναλαμβανόμενα σημεία τάξης r , έτσι ώστε ούτε το $(\nu \text{ GEN } r)$ ούτε το $\text{Neg}(\nu \text{ GEN } r)$ δεν ανήκουν στο $\text{Flg}(\kappa)$ (όπου το ν είναι η ελεύθερη μεταβλητή του r)”.

Η ίδια η μεθοδολογία της απόδειξης, είναι επίσης πρωτοφανής και έμεινε γνωστή σαν Γκοντελιανή απαρίθμηση!

οποία αποδεικνύει τη συνέπεια της $\Theta 1$.

Αυτά τα θεωρήματα «μη πληρότητας» έχουν πραγματικά μεγάλο επιστημολογικό ενδιαφέρον: **Δεν θα παρείχε πραγματικά καμία ενδιαφέρουσα πληροφορία, εάν μια θεωρία Θ απεδείκνυε τη συνέπειά της!** Αυτό ισχύει επειδή οι ασυνεπείς θεωρίες αποδεικνύουν τα πάντα, συμπεριλαμβανομένης και της συνέπειάς τους! Άρα μια απόδειξη συνέπειας της Θ (μέσα στη Θ), δεν θα μας έδινε καμία ένδειξη ως προς το εάν η Θ είναι πραγματικά συνεπής. Καμία αμφιβολία για τη συνέπεια της Θ , δεν θα επιλυόταν από μια τέτοια απόδειξη συνέπειας.

Ακόμα και αν αρχίζαμε να προσθέτουμε αξιώματα σε μία συνεπή θεωρία, πάντα κάποιες προτάσεις θα παρέμεναν *αναπόδεικτες*⁷. Δηλαδή δεν θα μπορούσαμε ποτέ να πούμε, αν ισχύουν ή όχι, σύμφωνα με τους κανόνες της. Αλλά ακόμα και αν προσθέταμε άπειρα νέα αξιώματα, πάλι θα υπήρχαν προτάσεις που δεν θα ήταν ποτέ δυνατόν να πούμε με βεβαιότητα ότι είναι ή δεν είναι αληθείς! Κάθε φορά που προσθέτουμε μια νέα πρόταση ως αξίωμα, θα υπάρξουν πάντα άλλες αληθινές προτάσεις, που δεν μπορούν ακόμα να αποδειχθούν σαν αληθινές, ακόμη και με το νέο αξίωμα. Επιπλέον εάν το σύστημα μπορεί να αποδείξει ότι είναι συνεπές, τότε θα είναι ασυνεπές. Αν θέλουμε μια θεωρία που να μην πέφτει σε αντιφάσεις, τότε είμαστε αναγκασμένοι να δεχτούμε ότι δεν θα είναι ποτέ πλήρης!

Ας εξετάσουμε με προσοχή τον τύπο ενός τυπικού συστήματος που λέει:

"Αυτός ο τύπος δεν είναι αποδείξιμος μέσα από το σύστημα". – (τύπος T)

Εάν αυτός ο τύπος ήταν αποδείξιμος μέσα από το σύστημα, θα είχαμε μια αντίφαση: γιατί τότε δεν θα ήταν αποδείξιμος μέσα από το σύστημα, έτσι ώστε ο τύπος T θα ήταν ψευδής.

Ομοίως, εάν δεν ήταν αποδείξιμος μέσα από το σύστημα, τότε δεν θα ήταν ψευδής, αλλά θα ήταν αληθινός, δεδομένου ότι σε οποιοδήποτε συνεπές σύστημα τίποτα ψεύτικο δεν μπορεί να αποδειχθεί, παρά μόνο αλήθειες.

Έτσι ο τύπος T δεν είναι αποδείξιμος μέσα από το σύστημα, αλλά **αναπόδεικτος**, δεν επιδέχεται τιμή ούτε αληθούς ούτε ψευδούς. Άρα αφού καταλήξαμε ότι ο τύπος είναι αναπόδεικτος, τότε είναι αληθές αυτό που λέει, ότι δηλαδή "Αυτός ο τύπος δεν είναι αποδείξιμος μέσα από το σύστημα"! Δηλαδή είναι αληθής.

Αποδείξαμε ότι είναι αληθής, ένας τύπος που λέει ότι δεν μπορεί να είναι ούτε αληθής ούτε ψευδής! Τι παράδοξη αντίφαση! Κάναμε κάπου λάθος; Υπάρχει κάτι που μας ξεφεύγει; Τι συμβαίνει με αυτό το πρόβλημα; Είναι πολύ οριακό, και δύσκολο να κατανοηθεί πλήρως.

Είναι ίσως χρήσιμο να εξεταστεί και το αντίθετο θέμα, να εξετάσουμε δηλαδή το πρόβλημα ότι ο τύπος: "Αυτός ο τύπος δεν είναι αποδείξιμος μέσα από το σύστημα" να είναι ψεύτικος, να δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο, και έτσι ότι ο

⁷ **Αναπόδεικτη** πρόταση εννοούμε αυτήν που **δεν επιδέχεται απόδειξης, ποτέ**. Προσοχή να μην γίνεται σύγχυση με την έννοια: *αναπάντητη*. Μια *αναπάντητη* πρόταση μπορεί κάποτε να απαντηθεί, ενώ μία *αναπόδεικτη* πρόταση δεν θα απαντηθεί εξ ορισμού, ποτέ.

τύπος να είναι αληθινός, από όπου προκύπτει ξανά ότι είναι **αναπόδεικτος**.

Ακόμα κι έτσι, η ανάλυση του προβλήματος παραμένει διαρκώς μη πειστική: θεωρούμε ότι κάπου πρέπει να υπάρχει μια διανοητική σύλληψη που μας διαφεύγει.

Ολόκληρη η εργασία των θεωρημάτων του Gödel αφορά στο να μας δείξει ακριβώς ότι δεν υπάρχει καμία διανοητική σύλληψη που να μας ξεφεύγει κάπου στα παραπάνω, και ότι όλα τα τυπικά συστήματα που είναι (1) συνεπή, και (2) ικανά για απλές αριθμητικές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στους φυσικούς αριθμούς, αυτά είναι υποχρεωτικά ελλιπή, δηλαδή περιέχουν αναπόδεικτες προτάσεις. Τις αναπόδεικτες αυτές προτάσεις (τις ονομάζουμε **γκοντελιανές προτάσεις**), που σε εμάς που στεκόμαστε έξω από το σύστημα, μπορεί να μοιάζουν τέλεια κατανοητές λεκτικά και αληθοφανείς, το ίδιο όμως το σύστημα δεν μπορεί να τις υποστηρίξει.

Ποιος μπορούσε να υποψιαστεί πριν την ανατροπή που επέφερε ο Gödel, ότι τα αυστηρά Μαθηματικά θα απεδείκνυαν τελικά, ότι τα ίδια θα μας κρύβουν πάντα κάποιο τμήμα της γνώσης; Η συνεχής ενασχόληση των ανθρώπων κατά τις τελευταίες χιλιετίες με τη βασίλισσα των Επιστημών, έχει συσσωρεύσει πολυάριθμα αναπάντητα μαθηματικά προβλήματα σε διάφορους τομείς: Κάποια λύνονται μετά από αρκετούς αιώνες, πολλά όμως παραμένουν ανεξιχνίαστα. Από τα άλυτα προβλήματα, ποια δεν θα λυθούν ποτέ, γιατί αποτελούν «προτάσεις Gödel»; Δυστυχώς δεν έχουμε τρόπο να κρίνουμε προκαταβολικά, αυτό το ερώτημα. Αν ένα πρόβλημα τελικά αποδειχθεί αληθές ή ψευδές, τότε ξέρουμε. Αν δεν αποδειχθεί, τότε ή μπορεί εμείς να μην έχουμε ακόμα σκεφτεί τη λύση, ή μπορεί να μην επιδέχεται ποτέ καμία λύση!

Μήπως αυτά σημαίνουν ότι υπάρχει κάποιο ανώτερο όριο, που ο ανθρώπινος νους δεν θα μπορέσει ποτέ να υπερβεί; Η αποδειξιμότητα ή όχι μιας πρότασης, σε ένα συγκεκριμένο επαγωγικό σύστημα, δεν μας απαντά τίποτα από μόνη της, για το θέμα εάν η συγκεκριμένη πρόταση έχει σαφώς καθορισμένη απάντηση (που μας είναι προσωρινά ή οριστικά άγνωστη), ή εάν μπορεί να μαθευτεί. Λέει μόνο ότι το συγκεκριμένο επαγωγικό σύστημα που εξετάζεται, δεν αποφασίζει το ζήτημα. Εάν υπάρχουν οι αποκαλούμενες "απολύτως αναπόδεικτες" προτάσεις, των οποίων η αλήθεια δεν μπορεί ποτέ να μαθευτεί ή είναι αδιευκρίνιστη, αυτό είναι ένα αμφισβητούμενο σημείο μεταξύ των διάφορων φιλοσοφικών σχολών.

Η συζήτηση και οι επιπτώσεις των αποτελεσμάτων της «μη πληρότητας» έχουν σοβαρές επιπτώσεις στη φιλοσοφία των μαθηματικών, ιδιαίτερα σε απόψεις όπως ο φορμαλισμός, ο οποίος χρησιμοποιεί την επίσημη λογική για να καθορίσει τις αρχές του. Ο φορμαλισμός θεωρείται ότι χτυπήθηκε ανεπανόρθωτα!

Μπορούμε να παραφράσουμε το πρώτο θεώρημα του Gödel λέγοντας ότι "δεν μπορούμε ποτέ να βρούμε ένα ενιαίο αξιωματικό σύστημα που είναι σε θέση να αποδείξει όλες τις μαθηματικές αλήθειες, χωρίς καμία αναλήθεια". Αφ' ετέρου, από μια αυστηρά φορμαλιστική προοπτική, αυτή η παράφραση θα θεωρούνταν χωρίς νόημα επειδή προϋποθέτει ότι η μαθηματική "αλήθεια" και "η αναλήθεια" είναι καθορισμένες με σαφήνεια με μια απόλυτη έννοια, ενώ αυτή είναι σχετική με το κάθε φορμαλιστικό σύστημα.

Η ακόλουθη λεκτική αναδιαμόρφωση του δεύτερου θεωρήματος είναι ακόμα

πιο συνταρακτική για τα θεμέλια των μαθηματικών: “Εάν ένα αξιωματικό σύστημα μπορεί να αποδειχθεί (από μέσα από το ίδιο) ότι είναι συνεπές και πλήρες, τότε είναι ασυνεπές”. Άρα αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι το σύστημα Θ1 είναι συνεπές, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο “ισχυρότερο” συνεπές σύστημα Θ2, του οποίου όμως η συνέπεια να έχει αποδειχθεί χωρίς τη χρήση του Θ1! Έτσι όμως, η αναζήτηση της συνέπειας, μετατίθεται έπ’ άπειρον. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η πεπερασμένη ζωή των μαθηματικών έγινε κατά πολύ δυσκολότερη!

Πολλοί μελετητές έχουν συζητήσει πάνω σε αυτά που το θεώρημα «μη πληρότητας» του Gödel υπονοεί, για την **ανθρώπινη νοημοσύνη**. Ένα μεγάλο μέρος της συζήτησης στρέφεται στο εάν το ανθρώπινο μυαλό είναι ισοδύναμο με μια *μηχανή Turing*⁸, ή εν τέλει με οποιαδήποτε πεπερασμένη μηχανή.

Εάν είναι, και εάν η εγκεφαλική μηχανή είναι συνεπής, τότε τα θεωρήματα «μη πληρότητας» του Gödel θα ίσχυαν και για εμάς τους ίδιους.

Μια από τις πιο πρώιμες προσπάθειες να χρησιμοποιηθεί η «μη πληρότητα» στο λόγο για την ανθρώπινη νοημοσύνη, ήταν από τον Gödel τον ίδιο, στη διάλεξη του 1951, που τιτλοφορήθηκε “Μερικά βασικά θεωρήματα στα θεμέλια των μαθηματικών και οι φιλοσοφικές επιπτώσεις τους”. Σε αυτήν την διάλεξη, ο Gödel χρησιμοποιεί το θεώρημα της “μη πληρότητας”, για να φθάσει στο συμπέρασμα όπου φαίνεται να πιστεύει ότι το ανθρώπινο μυαλό δεν ήταν ισοδύναμο με μια πεπερασμένη μηχανή, δηλαδή η δύναμή του υπερβαίνει αυτή μιας οποιασδήποτε πεπερασμένης μηχανής. Εντούτοις, αναγνώρισε ότι αυτό ήταν μόνο μια υπόθεση.

Στα επόμενα έτη, περισσότερο άμεσοι αντί-μηχανιστικοί ειρμοί σκέψης, επικρατούσαν διάχυτα στην διανοητική ατμόσφαιρα. Το 1960, η Hilary Putnam δημοσίευσε ένα έγγραφο⁹, στο οποίο επισημαίνει τις ρωγμές των αντί-μηχανιστικών επιχειρημάτων. Είναι δυνατό, υποστηρίζει η Putnam, να είναι το ανθρώπινο μυαλό ασυνεπές. Εάν είναι να χρησιμοποιηθεί η τεχνική Gödel για να αποδειχθεί οποιαδήποτε πρόταση, πρέπει πρώτα να αποδείξει τη συνέπειά του, ένας αποθαρρυντικός και ίσως αδύνατος στόχος. Ο J. R. Lucas¹⁰ λίγο μετά, εκθέτει τους λόγους για τους οποίους το ανθρώπινο μυαλό μπορεί να θεωρηθεί συνεπές. Αναγνωρίζει όμως, από το δεύτερο θεώρημα Gödel, ότι **ένα ανθρώπινο μυαλό δεν μπορεί τυπικά να αποδείξει τη συνέπειά του**. Οι θέσεις του Lucas γίνονται κάποτε ακραίες, όταν πχ. εξηγεί ότι οι πολιτικοί είναι ασυνεπείς! Αργότερα, ο Roger Penrose¹¹ εισήλθε στην αρένα, παρέχοντας κάπως πιο νέα αντί-μηχανιστικά επιχειρήματα. Οι απόψεις του όμως, έχουν αποδειχθεί, ιδιαίτερα αμφισβητούμενες.

Με απόλυτα κατανοητό τον κίνδυνο της προέκτασης σε εδάφη απόμακρα από την κρυστάλλινη καθαρότητα των μαθηματικών, θα αποτολμήσουμε κάποιες σκέψεις όπου ίσως είναι ασφαλής η προσομοίωση των θεωρημάτων του Gödel

⁸ Η μηχανή Turing είναι ένα θεωρητικό, μαθηματικό μοντέλο του Alexander Turing το 1936 και αφορά, την ένα προς ένα απαρίθμηση των θεωρητικών βημάτων που θα έπρεπε να εκτελέσει μία υποθετική υπολογιστική κατασκευή που να λειτουργεί όπως ο ανθρώπινος εγκέφαλος, ώστε να επιτελέσει αριθμητική πράξεις. Λέγεται *μηχανή* με την αρχαιοελληνική έννοια μηχανεύομαι = επινοώ, σκέπτομαι τρόπους να λύσω ένα πρόβλημα, να ξεφύγω (πολυμήχανος). Με αυτές τις μελέτες, ο Turing θεωρείται ο πρόδρομος των μηχανικών των ηλεκτρονικών υπολογιστών.

⁹ Hilary Putnam, 1960, *Minds and Machines* από Sidney Hook, ed., *Dimensions of Mind: A Symposium*. New York University Press. Επανεκδόθηκε από Anderson, A. R., ed., 1964. *Minds and Machines*. Prentice-Hall: 77.

¹⁰ *Minds, Machines and Gödel* (1963), *The Freedom of the Will* (1970)

¹¹ *The Emperor's New Mind* (1989) [ENM], *Shadows of the Mind* (1994) [SM].

στην πραγματική ζωή. Τούτη η προσομοίωση της ζωής πάνω στα μαθηματικά, μπορεί και επιβάλλεται να γίνεται, ακόμα και αν ήθελε οδηγήσει τη σκέψη μας σε μαιάνδρους ατέρμονες. Γιατί τα μαθηματικά τα δημιούργησαν, τα σκέφτονται και τα αναπτύσσουν οι άνθρωποι, για τους ανθρώπους. Για τη χρήση τους, εκεί και όπου χρειάζεται και ταιριάζει. Μας φαίνεται λοιπόν δόκιμο να εξοπλίσουμε τη διανοητική μας φαρέτρα με τα βέλη των παραπάνω θεωρημάτων. Ας περάσουμε στην ερώτηση που βασανιστικά πλέον προκύπτει: Πως χειριζόμαστε στην πράξη και ανάλογα με την περίπτωση, τις συνέπειες από τα θεωρήματα του Gödel; Τι είδους συνέπειες προκύπτουν από αυτά, ακόμα και για την καθημερινή μας ύπαρξη;

Η πλέον άμεση συνέπεια για τη ζωή μας, είναι η αναγκαστική διάζευξη της **Αλήθειας** από την **Απόδειξη**. Θα πρέπει να συνηθίσουμε στην ιδέα ότι κάποια πράγματα μπορεί να είναι αληθινά, ακόμα και αν δεν μπορούμε ή και μάλιστα αν δεν μπορέσουμε ποτέ, να τα αποδείξουμε. Δεν είναι έτοιμος ο νους μας ακόμη, για μια τέτοια ανατρεπτική τοποθέτηση. Τα θεωρήματα του Gödel μοιάζουν να απηχούν την ύπαρξη κάποιου αόρατου εξωτερικού τοίχους, που περιβάλλει την έκταση της ανθρώπινης νοητικής σφαίρας. Πώς τάχα μπορεί πράγματι κάτι να ισχύει, χωρίς να γίνεται ποτέ αποδεικτό; Πως μπορούμε να κατανοήσουμε τον λόγο που συμβαίνει κάτι τέτοιο; Ποια είναι η πιθανή φυσική εξήγηση; Έχουμε την ελπίδα να κατανοήσουμε τουλάχιστον, την πρωτογενή αιτία της ίδιας αυτής της αδυναμίας κατανόησης, που περιορίζει την πληρότητα της ανθρώπινης γνώσης;

Η έννοια κλειδί είναι: το σύστημα αναφοράς ή το επίπεδο θεώρησης ή το επίπεδο αναφοράς ή το πλαίσιο αναφοράς ή η φέτα πραγματικότητας ή το επίπεδο συνειδητότητας ή όπως αλλιώς το ονομάσουμε.

Ας δούμε από κοντά ένα από τα συνηθισμένα φυσικά συστήματα: Το ζευγάρι που αποτελείται από δύο ετερόφυλους ανθρώπους που αγαπιούνται μεταξύ τους. Είναι συχνό να αναρωτιούνται τα μέλη ενός ζευγαριού μεταξύ τους, αν το ένα αγαπάει το άλλο. Παρόλο που η διαβεβαίωση “**Σ’ αγαπώ**” μοιάζει με γκοντελιανή πρόταση, μάλλον θα έπρεπε να τη δεχθούμε σαν αληθινή, εκτός και αν αποδειχτεί από τα πράγματα σαν ψεύτικη. Γιατί μέσα στο τυπικό σύστημα ενός συνεπούς¹² ζευγαριού (αν μπορούσαμε βέβαια ποτέ να το περιγράψαμε με μαθηματική ακρίβεια), δεν θα υπάρξει ποτέ πληρότητα. Αν μπορούσε να αποδείξει ένα συνεπές ζευγάρι ότι είναι πλήρες (εσωτερικά από μόνο του), τότε θα ήταν ασυνεπές. Δεν θα μοιάζει όμως τώρα ποια μυστήριο, αν σκεφτούμε ότι η πληρότητα σε ένα ζευγάρι επιστεγάζεται με τον ερχομό των παιδιών. Μεταβαίνοντας από το επίπεδο αναφοράς του “ζεύγους” σε αυτό της “οικογένειας” αλλάζουμε τρόπο κατανόησης της πραγματικότητας, αλλάζει η συνειδησή μας σχετικά με την έννοια της “πληρότητας”. Σαν οικογένεια, μπορούμε τώρα να ισχυριστούμε ότι το “ζευγάρι” ήταν “πλήρες” και μάλιστα καλύτερα ότι “είχε τις δυνάμεις να γίνει πλήρες”, αφού περνώντας ο καιρός προχώρησε στην ισχυρότερη έννοια της “οικογένειας”. Πριν την δημιουργία οικογένειας, η έννοια της πληρότητας, δεν μπορούσε καν να οριστεί με σαφήνεια, πόσο μάλλον δε να αποδειχθεί! Ύστερα από τα παραπάνω, η ίδια η έννοια της οικογένειας, σαν φυσικό και συνεπές σύστημα, θα έχει φυσικά να περάσει από τις δικές της αδιέξοδες και αναπόδεικτες εσωτερικές της προτάσεις.

¹² Μπορούμε να θεωρήσουμε *συνεπές* ένα ζευγάρι, όταν κανένας από τους δύο, δεν παρουσιάζει αντιφάσεις και παράλογες συμπεριφορές ή συναισθήματα, μέσα στα πλαίσια της άτυπα συμφωνημένης πλην καλά ορισμένης καθημερινής ζωής και ισορροπίας ανάμεσά τους.

Φαίνεται ότι ο ανθρώπινος νους, ωθούμενος από την δύναμη του συναισθήματος της αγάπης για το έτερον ήμισυ, υπερπηδά τις γκοντελιανές συμπληγάδες πύλες, αλλάζοντας το πλαίσιο αναφοράς σε ένα άλλο ισχυρότερο. Κατά κάποιο τρόπο, φαίνεται πως πιθανώς υπάρχει μέσα μας η ενστικτώδης μέθοδος αναχαίτισης των συνεπειών των αναπόδεικτων γκοντελιανών παραδόξων.

Παρατηρούμε ότι αυτό που αρχικά ήταν αναπόδεικτη πρόταση σε κάποια ζευγάρια, δηλαδή αν ο ένας αγαπούσε τον άλλον, τελικά σε πολλά από αυτά οδήγησε σε μια νέα εκτεταμένη δομή, με ισχυρότερη και καλύτερη τελικά θέση. Μπορούμε με χαρακτηρίσουμε μάλιστα την αγάπη σαν τη δύναμη, την ενέργεια, το μοχλό που ανοίγει το δρόμο για την αλλαγή επιπέδου. Αν στη φάση ακόμα της διαμόρφωσης του ζευγαριού, ο ένας από τους δύο, επιθυμώντας να μάθει την αλήθεια ή το ψεύδος της τότε πρότασης “Σ’ αγαπώ”, υπέβαλε αυτή την πρόταση σε εξαντλητικές δοκιμασίες, είναι πολύ πιθανό το ζευγάρι να είχε διαλυθεί. Γιατί υπάρχουν φαινόμενα που όταν τα θέτεις κάτω από παρατήρηση, αλλάζουν σχήμα και μορφή, ακριβώς επειδή τα ελέγχεις “πειραματικά”. Γιατί έννοιες και συναισθήματα όπως η αγάπη για τον ή την αγαπημένο σύντροφο, η αγάπη για τους γονείς, η αγάπη για τα τέκνα, η αγάπη για την πατρίδα, η φιλία, η εμπιστοσύνη, και άλλα, κατοικούν αποκλειστικά μέσα στους ανθρώπους που τα νοιώθουν, και κλονίζονται από την ισορροπία τους, όταν κάποιος απ’ έξω αρχίσει να τα προκαλεί, να τα δοκιμάζει, με σκοπό την παρατήρησή τους. Ειδικά μάλιστα, αν αυτός που τα θέτει σε στενή παρατήρηση, είναι και αυτός προς τον οποίο απευθύνονται, η παρατήρηση μπορεί να προκαλέσει αντιδραστικά δυσπιστία, ανασφάλεια και πόνο. Τέτοιου είδους συναισθήματα αλλά και τα αντίθετά τους, συμπεριφέρονται σαν να αποτελούν κάποιας μορφής αληθινές μεν, αναπόδεικτες δε γκοντελιανές προτάσεις. Καλά θα κάνει κανείς να τα προσεγγίζει διακριτικά και με φρόνηση, και να μην επιχειρεί προσέγγιση ιατροδικαστικής εμπνεύσεως, άλλως, κίνδυνος είναι, να μείνει μόνος με το πτώμα!

Δεν είναι μόνον οι θνητοί που βασανίζονται από την έλλειψη απόδειξης σε κάποια θέματα. Μπορεί και ο Θεός ο ίδιος να ζήτησε από τον Αβραάμ την απόδειξη της αγάπης που του έτρεφε, μην μπορώντας ούτε ο ίδιος να βρει την απάντηση! Παρόλο που ο Αβραάμ δέχθηκε απρόθυμα να θυσιάσει τον ίδιο τον υιό του, ή θεϊκή σοφία ευτυχώς έλαμψε τελικά, ζητώντας του να σταματήσει την αναίτια και άσπλαχνη αιματοχυσία. Γιατί μάλλον κατά τη γνώμη μας, ο Θεός συνειδητοποίησε πως ούτε μια ανθρωποθυσία μπορούσε να τον δια φωτίσει για το ερώτημα. Ο Αβραάμ σαν συνεπές θρησκευτικό σύστημα που ήταν, δεν ήταν ποτέ δυνατόν να αποδείξει τέτοιες προτάσεις γρίφους, όπως “Αγαπάω τον Θεό μου”!

Αν ο Θεός είχε επιμείνει σε μια τέτοια ακατανόητη και στερημένη αιτίας, απόδειξη αγάπης, θα είχε όχι μόνον σίγουρα καταστρέψει την σχέση του με τον Αβραάμ, αλλά δεν θα είχε επικρατήσει σαν το υπέρτατο όν λατρείας, τόσες χιλιοετηρίδες σε τόσους πολλούς ανθρώπους. Και ο λόγος δεν θα ήταν μόνον η φρικαλέα ενέργεια της προτροπής σε φόνο ενός αθώου παιδιού. Η ανθρωπότητα λάτρεψε μεν αιματοβαμμένες θεότητες όπως ο Μολώχ, αλλά όχι για πολύ. Θα ήταν κυρίως, η αντίληψη της ανεπίτρεπτα μειωμένης ευφυΐας του θεϊκού στοιχείου, που θα σχημάτιζαν αργά ή γρήγορα, οι πιστοί. Γιατί κανείς δεν θα μπορούσε πια να λατρεύει έναν θεό, που σαν τέτοια άπειρη και πάνσοφη οντότητα που είναι, θα έπρεπε να γνώριζε τα δύο πολύτιμα θεωρήματα “περί μη πληρότητας”, που θα ανακάλυπταν τα πλάσματα που ο ίδιος είχε φτιάξει, μετά από μερικές χιλιάδες χρόνια!

Τελικά ο πραγματικός λόγος που δεν έγινε τελικά, η θυσία του Αβραάμ θα μείνει αναπάντητος. Μήπως η αγάπη του Αβραάμ, ανάγκασε, ώθησε τον ίδιο το Θεό να αλλάξει πλαίσιο αναφοράς και να “δει” σοφότερα; Μήπως ο Gödel έχει συλλάβει μια διανοητική έννοια, έναν νόμο τόσο υπέρτατο, που υπερβαίνει ακόμα και το πλαίσιο αναφοράς που έχουν συλλάβει οι άνθρωποι για να τοποθετήσουν το Υπέρτατο Όν;

Αλλά ας περάσουμε τώρα, σε μια σειρά από πολύ ενδιαφέρουσες και προκλητικές διανοητικές ασκήσεις. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, δημοσιεύτηκε ένα βιβλίο με τίτλο “Επιπεδοχώρα”.¹³ Θα σας εξιστορήσουμε την πλοκή του βιβλίου, αλλά ταυτόχρονα προσπαθήστε να κατανοήσετε τις ερωτήσεις και τα σχέδια που παραθέτουμε. Βασιστείτε στη λογική αλλά και στη διαίσθησή σας.

Σε αυτό το βιβλίο περιγράφεται η υποθετική ζωή των πλασμάτων που κατοικούν πάνω σε μία πολύ μεγάλη επίπεδη επιφάνεια. Όλα είναι επίπεδα σε αυτή την χώρα, καθώς πρόκειται για έναν κόσμο που στερείται της αντίληψης της τρίτης διάστασης. Οι κάτοικοι αυτού του κόσμου δεν αντιλαμβάνονται το ύψος. Έχουν σαν μορφή διάφορα επίπεδα σχήματα: το ευθύγραμμο τμήμα, το τρίγωνο, το τετράγωνο, πολύγωνα, τον κύκλο κλπ. Η οργάνωση της ζωής ακολουθεί μια τάξη και ένα γενικό σχέδιο που να διευκολύνει την ύπαρξη στις δύο διαστάσεις.

Σε αυτή την παράξενη χώρα, δεν υπάρχει φυσικά σκιά, αφού λείπει το ύψος που τη δημιουργεί. Το φως φαίνεται να φτάνει από όλες τις κατευθύνσεις. Το ερώτημα “Από πού έρχεται το φως” απασχόλησε τα λαμπρότερα μυαλά της Επιπεδοχώρας, μάταια όμως και για πολύ χρόνο. Μια και το φως ερχόταν από τις τρεις διαστάσεις του χώρου μας, η ίδια η ερώτηση σχετικά με την έννοια της κατεύθυνσης, ήταν ακατανόητη. Η μυστηριώδης παρατήρηση “το φως έρχεται από παντού” αποτελούσε για τους κατοίκους αυτού του δισδιάστατου σύμπαντος, αναπόδεικτη πρόταση, πλην όμως αληθινή. Ένας από τους κατοίκους αυτής της χώρας, εξαιτίας κάποιας τυχαίας ανωμαλίας στην υφή αυτού του επίπεδου σύμπαντος, μπόρεσε να ξεπροβάλει για λίγες ώρες, στον δικό μας τρισδιάστατο κόσμο. Πήρε απαντήσεις για πολλά από τα μυστήρια που τον απασχολούσαν, αλλά όταν επέστρεψε στον κόσμο του, ανακάλυψε ότι τον περίμενε η χλεύη και η δυσπιστία, καθώς ανακοίνωσε στους υπόλοιπους δισδιάστατους φίλους του, ότι “Το φως έρχεται σε εμάς δια μέσου του τρισδιάστατου κόσμου που μας περιβάλλει”! Κανείς δεν μπορούσε να καταλάβει, τι εννοούσε.

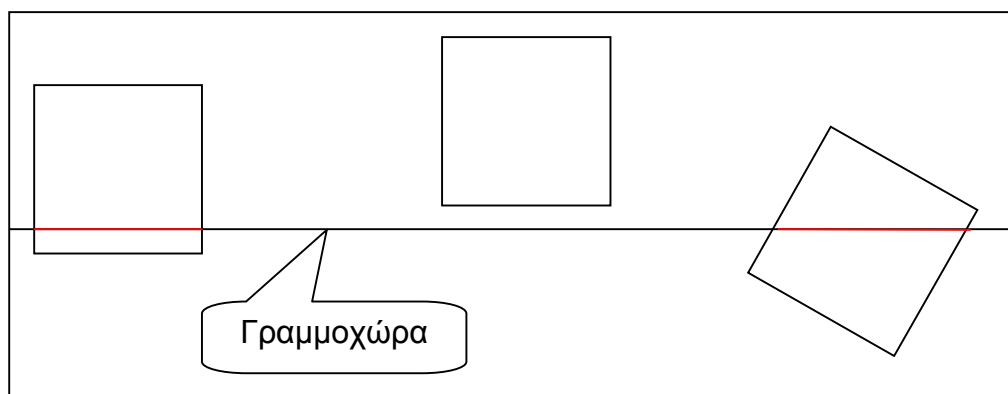
Μήπως ανάλογα μπορούμε και εμείς να εξηγήσουμε, τη μυστηριώδη φύση του φωτός στις τρεις διαστάσεις μας; Τι θα παρατηρούσαμε αν κάναμε ένα άλμα στην τέταρτη πχ. διάσταση και μετά επιστρέψαμε; Μήπως μπορούμε έτσι να ερμηνεύσουμε γιατί έχει σταθερά πάντα την ίδια ταχύτητα, ανεξάρτητα από την ταχύτητα και τη θέση οποιουδήποτε συστήματος αναφοράς το εξετάζουμε; Μήπως μπορούμε έτσι να ερμηνεύσουμε τη διπλή φύση, κυματική και σωματιδιακή, του φωτός;

Σε αυτή τη παράξενη χώρα, όταν ένα πλάσμα πλησίαζε κάποιο άλλο, η εικόνα που φαινόταν ήταν πάντα ένα ευθύγραμμο τμήμα. Αλλά επινόησαν από τα παλιά χρόνια, χρωματικούς κώδικες, τρόπους κίνησης κατάλληλους και οξυδέρκεια στην παρατήρηση της χροιάς της φωνής, ώστε τελικά μπορούσαν να καταλάβουν άνετα ποιος ήταν απέναντί τους. Μπορούσαν να αντιληφθούν κατά κάποιο τρόπο το σχήμα του άλλου, χωρίς να τον βλέπουν ολόκληρο με τα μάτια τους.

¹³ Flatland: A Romance of Many Dimensions, από τον Άγγλο Edwin A. Abbott (1838-1926).

Μήπως αυτό είναι ανάλογο με την ιδιότητα της ανθρώπινης όρασης, να κατανοεί την Τρίτη διάσταση, λόγω της απόστασης των περίπου 3^ο μοιρών που έχουν οι οφθαλμοί μεταξύ τους; Γιατί τα δύο είδωλα με τη διαφορά απεικόνισης κατά 3^ο μοίρες, μοιάζει να δημιουργούν την αίσθηση των τριών διαστάσεων, στον ανθρώπινο εγκέφαλο¹⁴. Τότε τι είδους αισθητήρια όργανα, θα επέτρεπαν σε κάποιο είδος να κατανοεί πχ. τέσσερις διαστάσεις;

Κάποια ημέρα στο όνειρό του, ο τετράγωνος κάτοικος της Επιπεδοχώρας, συνάντησε έναν κάτοικο της Γραμμοχώρας (το σύμπαν που αποτελείται από μία μόνο διάσταση, την ευθεία). Στην συζήτηση που ακολούθησε, παρά τις σοβαρές δυσκολίες, ο κάτοικος της Επιπεδοχώρας κατάλαβε ότι, όποια θέση και να έπαιρνε, το μόνο που αντιλαμβανόταν ο κάτοικος της Γραμμοχώρας ήταν ένα ευθύγραμμο τμήμα, με αυξομειούμενο μέγεθος. Η τομή δηλαδή ενός τετραγώνου από μία ευθεία. Ο κόσμος του ήταν μόνο η ευθεία. Μπορούσε να κατανοήσει μόνο τα σημεία και να υπολογίσει την απόστασή τους. Ο κάτοικος της Γραμμοχώρας μάλιστα απέδωσε στη μαγεία το κόλπο με το οποίο μπαινόβγαινε το τετράγωνο στον χώρο του, γιατί σε αυτόν φαινόταν να αυξομειώνεται το μήκος του κατά πως κινούνταν και να εξαφανίζεται και να εμφανίζεται από το πουθενά! Οι φυσικοί νόμοι της Γραμμοχώρας δεν επαρκούσαν για την εξήγηση αυτού του φαινομένου. Ήταν αληθινό, αλλά αναπόδεικτο. Γκοντελιανό, θα λέγαμε εμείς.

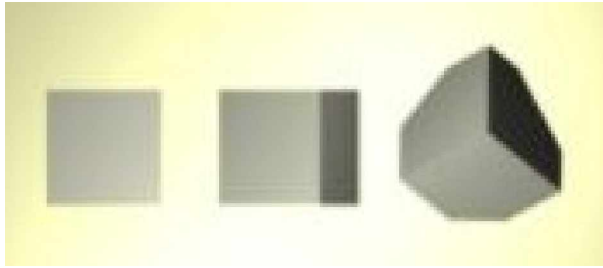


Με κόκκινο, η αντίληψη του τετραγώνου, από τον κάτοικο της Γραμμοχώρας.

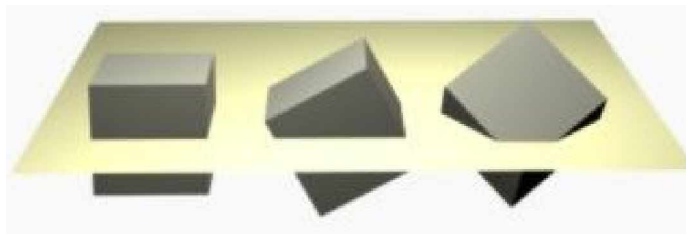
Όταν ξύπνησε το τετράγωνο, ξανασκέφτηκε προσεκτικά το όνειρό του. Η Αναλογία σαν γεωμετρική μέθοδος, του ήταν γνωστή. Μπορούσε άραγε να εφαρμοστεί κάτι το ανάλογο και στον δικό του κόσμο, όπως αναλογικά έγινε η εμπειρία του με τη Γραμμοχώρα;

Τελικά κατέληξε ύστερα από πολύ περισυλλογή και ακόμα περισσότερη έμπνευση, στο ακόλουθο σχέδιο:

¹⁴ Είναι γνωστό πως οι μονόφθαλμοι, χάνουν την οπτική αντίληψη του βάθους.



Οποτεδήποτε στην Επιπεδοχώρα παρατηρούσε αυτά τα περιγράμματα, τότε υπήρχε η πιθανότητα για τους κατοίκους του τρισδιάστατου κόσμου, να έχει συμβεί αυτό:



Το τετράγωνο επιπέδου κατανοούσε πολλά από τα μυστήρια που ήταν ακατανόητα στον κόσμο του. Αλλά τα κατανόησε, μόνο αφού κατάφερε να βγει από το πλαίσιο αναφοράς του.

Ποια είναι η γνώμη σας, τώρα, ύστερα από τα παραπάνω; Μπορείτε να προεκτείνετε με Ανάλογους συλλογισμούς, πως θα μπορούσε να είναι ο υπερκύβος των 4 διαστάσεων; Μήπως μπορείτε να βρείτε, ποια τρισδιάστατα στερεά, θα μπορούσαν να αποτελούν την τομή ενός τέτοιου υπερκύβου με τον τρισδιάστατο κόσμο μας; Δηλαδή τι είδους δικές μας οπτικές αντιλήψεις, θα μπορούσαν να μας ειδοποιήσουν ότι αν βλέπαμε κάτι, αυτό θα μπορούσε να είναι ένα φαινόμενο εισόδου ενός τετραδιάστατου κύβου στον τρισδιάστατο χώρο;

Προσπαθήστε να μετρήσετε τις πλευρές, τις ακμές και τις κορυφές αυτού του σώματος.

Δοκιμάστε τη μέθοδο της Αναλογίας σε μία Σφαίρα. Πως θα μπορούσε να είναι η υπερσφαίρα των 4 διαστάσεων; Πως μπορεί να μας φαίνεται ανάλογα με τη θέση της, από το δικό μας σύστημα αναφοράς των 3 διαστάσεων;

Αυτού του είδους οι σκέψεις, οδηγούν απευθείας σε ενορατικές συλλήψεις της Πραγματικότητας. Εξηγήσαμε προγενέστερα πως η Αλήθεια δεν νοείται πια, σαν αναγκαστικά Αποδείξιμη. Η Αλήθεια υπερβαίνει την Απόδειξη. Αυτό έχει ακόμα μια άμεση συνέπεια: **Η Πραγματικότητα υπερβαίνει τη Γνώση.** Αν είναι σωστά τα θεωρήματα του Gödel, και αν είναι σωστή η προέκταση αυτών των θεωρημάτων στην Πραγματικότητα, τότε μπορούμε να ισχυριζόμαστε προτάσεις σχετικά με το τι υπάρχει, που δεν μπορούμε να τις αποδείξουμε. Ανοίγει ο δρόμος για την διαισθητική προέλευση της Αλήθειας, ανοίγει ο δρόμος προς τη Μεταφυσική. Αλλά προσοχή απαιτείται να μην χαθεί το μέτρο. Κάθε γκοντελιανή πρόταση, πρέπει να είναι το τέλος μιας σειράς σκέψεων, ποτέ η αρχή. Δηλαδή μέχρι να διαλευκανθεί το όποιο θέμα είναι ανοιχτό, δεν μπορούμε να το λάβουμε αναγκαστικά σαν αληθινό και να οικοδομήσουμε πάνω του τάχα αληθινές σκέψεις. Μπορεί κάλλιστα μετά από χρόνια, ένας να αποδείξει ότι δεν ισχύει τελικά η αλήθεια αυτού του θέματος. Αν μία πρόταση, ή ένα θέμα, ή ένα πρόβλημα, παραμένουν αναπάντητα για καιρό,

εμείς μπορεί μεν να υποθέτουμε, ότι είναι αληθή και αναπόδεικτα γκοντελιανά τερτίπια, αλλά μπορεί εξίσου να έχουμε άδικο, και να πρόκειται απλά για ένα δύσκολο πρόβλημα, του οποίου η λύση άργησε να βρεθεί. Η σωστή τακτική της επιστήμης, είναι να εξακολουθεί να επιτίθεται σε όλους τους τομείς του επιστητού, όσο και να μοιάζουν άλυτοι, γιατί δεν μας είπε ούτε ο Gödel, ούτε κανείς άλλος, προκαταβολικά, *ποιες συγκεκριμένες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες είναι ψευδείς*.

Τώρα για παράδειγμα ας δούμε ένα κοινό Μεταφυσικό ζήτημα. Ισχυρίζονται κάποιοι πως είναι δυνατή η επικοινωνία με πνεύματα ανθρώπων που έχουν πεθάνει, διότι αυτά μπορεί να έρχονται σε επαφή με “διάμεσα” μέντιουμ, που να έχουν την ευαισθησία λήψης τέτοιων μηνυμάτων από το “Υπερπέραν”. Σύμφωνα με τα θεωρήματα του Gödel, υπάρχει περίπτωση κάτι τέτοιο να ισχύει, χωρίς να γίνεται δυνατή η απόδειξή του. Ποια είναι η σωστή θέση απέναντι σε τέτοιες αναπόδεικτες προτάσεις;

Ας δεχθούμε καλοπροαίρετα και με κίνδυνο να πέσουμε θύματα απάτης, πως μπορεί και να συμβαίνει κάτι τέτοιο, με κάποιο συγκεκριμένο μέντιουμ. Σε αυτό και μόνο το βήμα σκέψης, μπορούμε και οφείλουμε να σταθούμε εξερευνητικά. Δηλαδή να προσπαθήσουμε:

- να κατανοήσουμε αν πρόκειται για μία καλοστημένη θεατρική παγίδα, με σκοπό την παραπλάνηση των αφελών,
- να πληροφορηθούμε αν κάποια εξωτερική “συνεργασία” μπορεί να προμηθεύει το μέντιουμ με στοιχεία της προσωπικής ζωής του πελάτη, ώστε αυτός να θαυμάσει τη δύναμή του,
- να κρίνουμε την ασάφεια και αμφισημία των ρήσεων του μέντιουμ ώστε να είναι καλυμμένο σε κάθε ενδεχόμενο,
- να εκτιμήσουμε την δική μας ανθρώπινη επιθυμία / αδυναμία, να νοιώσουμε αγαπημένα και χαμένα πρόσωπα ξανά κοντά μας, κλπ.

Αν μπορέσουμε από την προηγούμενη έρευνα, να αποδείξουμε ότι το μέντιουμ είναι κοινός απατεώνας, τότε δώσαμε απάντηση και το θέμα έκλεισε.

Αν δεν είναι ανθρωπίνως δυνατόν να αποκλειστεί η απάτη από μέρους του μέντιουμ, τότε αυτό πρέπει να μας παρατείνει την αμφιβολία για την αλήθεια των ισχυρισμών του. Γιατί μπορεί να έχει δίκιο, μπορεί και όχι, στον ισχυρισμό του περί πνευματιστικών φαινομένων. Επειδή δεν αποδείξαμε ότι μια πρόταση είναι ψευδής, αυτό δεν σημαίνει ότι θα την δεχθούμε σαν αληθινή. Μπορεί να είναι γκοντελιανή, μπορεί όμως απλά να μην μπορέσαμε ακόμα να αποδείξουμε ότι είναι ψευδής.

Για κανένα λόγο δεν πρέπει να αποδώσουμε την τιμή του αληθούς σε μία πρόταση που δεν αποδείξαμε πλήρως. Αυτό θα ήταν σοβαρό λάθος. Ο νους μας όμως μπορεί να κάνει ασυναίσθητα την εσφαλμένη σκέψη “αφού δεν απέδειξα ότι είναι ψευδής αυτή η πρόταση, τότε είναι αληθινή”. Τούτο το συχνό λάθος οδηγεί φυσικά στην αποκαθίλωση της Λογικής. Το ορθό είναι να παραμείνουμε επιφυλακτικοί μπροστά στην έλλειψη απόδειξης. Πρέπει να αρνηθούμε να “επενδύσουμε” περισσότερο σε ένα θέμα που κρατάει ακόμα τα μυστικά του. Ξεκάθαρα, τα θεωρήματα του Gödel δεν απαξιώνουν τον Ορθό Λόγο. Δεν τον αχρηστεύουν. Παραμένει το κύριο εργαλείο δημιουργίας και τελικά γνώσης. Αλλά δεν μας καλύπτει για όλες τις χρήσεις. Ο Ορθός Λόγος, έχει τα όριά του.

Η δραματική αποκάλυψη του Gödel, δεν φαίνεται να πτόησε την επιστημονική

κοινότητα. Η ανακάλυψη των ορίων, είναι γενικά ένα φαινόμενο μάλλον της ενήλικης ζωής. Μοιάζει να έχουμε φτάσει σε κάποιο σημείο εξέλιξης, όπου τουλάχιστον δεν παρατηρούνται υστερικές αντιδράσεις από τους ισχυρούς πυλώνες νόησης της ανθρωπότητας. Σε άλλες όχι και τόσο μακρινές εποχές, θα είχαν οδηγήσει στην πυρά των αιρετικών, αυτόν που τόλμησε να αμφισβητήσει το εγωπαθές όραμα της ανθρωπότητας, για πλήρη και απόλυτη γνώση. Αλλά αντίθετα, τώρα τα πράγματα είναι πιο ξεκάθαρα. Καθώς ταξιδεύουμε προς όλο και βαθύτερα διαπλεγμένα επίπεδα πραγματικότητας, αναμένουμε σίγουρα και άλλες τέτοιες εκπλήξεις. Το όραμα πλέον που καθοδηγεί την πλεύση μας, είναι: για ποιόν ακριβώς λόγο, συμβαίνει αυτή η εμπλοκή και αδυναμία συνύπαρξης και πληρότητας και συνέπειας; Δεν είναι η πρώτη φορά, που σκοντάφτουμε σε φυσικά όρια: η μεγαλύτερη ποτέ δυνατή ταχύτητα είναι αυτή του φωτός, η αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg μας λέει ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα και τη θέση και τη ροπή ενός υποατομικού σωματιδίου, το φως συμπεριφέρεται και σαν σώμα και σαν ενεργειακό κύμα, η φύση της βαρύτητας παραμένει μυστήριο κλπ. Κάθε φορά που συναντήσαμε τέτοια όρια, απλά περνάει η αντίληψή μας, στο επόμενο επίπεδο θεώρησης των πραγμάτων. Σταθερά και αργά, αλλά διαρκώς, πλησιάζουμε στην κατανόηση της υφής του “Είναι”. Τίποτα από τα παραπάνω δεν μας εμπόδισε να απολαμβάνουμε την τέρψη της Αριστοτέλειας φύσης μας:

“πάντες άνθρωποι του εἶδέναι ὀρέγονται φύσει”¹⁵.

Κορυφαία μυαλά έχουν εμπλακεί στα κεντρικά ερωτήματα, αν ο ανθρώπινος εγκέφαλος είναι πεπερασμένος, αν είναι συνεπής, αν λειτουργεί σαν μηχανή, αν υπάρχει ανώτερο όριο στη κατανόησή του. Το θέμα παραμένει ανοιχτό, και μάλλον θα παραμείνει έτσι για αρκετό καιρό ακόμα!

Προσεγγίζοντας όλα τούτα τα μυστηριώδη θέματα, και προσπαθώντας να κατανοήσετε σε βάθος τόσο δύσκολες έννοιες, θα συνέβη και σε εσάς που φτάσατε μέχρι εδώ, το φαινόμενο να νοιώθετε στιγμιαία ότι “βλέπετε”, καλύτερα αντιλαμβάνεστε, μια νέα ξεκάθαρη εικόνα για τα πράγματα, που όμως χάνεται σχεδόν αυτοστιγμεί. Παρόλη την έντονη συγκέντρωση που απαιτεί αυτό το πόνημα, φευγαλέες είναι μόνον οι στιγμές όπου ο εγκέφαλός σας, μπορεί περάσει σε μια άλλη κατάσταση που ίσως να σας φαίνεται ότι υπάρχει η κρυμμένη εξήγηση. Όπως και με τα στερεογράμματα, πολύς κόσμος αναφέρει ότι αδυνατεί να “δει” την κρυμμένη κρυστάλλινη εικόνα. Μετά από αρκετή προσπάθεια, κάποιοι καταφέρνουν να την δουν. Όλοι όμως όσοι βλέπουν την εικόνα, θα συμφωνήσουν πως δεν κρατάει πολύ. Η παραμικρή απόσπαση της συγκέντρωσης αρκεί για να εξαφανίσει το εύθραυστο είδωλο από τη νόησή μας. Έτσι κάπως συμβαίνει και εδώ. Όσο μελετάμε και εμβαθύνουμε την κατανόησή μας, στα μυστήρια των γκοντελιανών αδιεξόδων, έρχονται μικρά αποσπάσματα από “άλλες πραγματικότητες” στο νου μας. Αλίμονο, είναι λιγότερο από ανεπαρκή για να βιώσουμε τι ακριβώς συμβαίνει εκεί έξω. Είναι όμως αρκετά για να ερεθιστεί η έμφυτη περιέργειά μας. Αυτό μπορεί να φανεί μελλοντικά ότι είναι μόνον θέμα εξάσκησης, που δεν συλλαμβάνουμε πλήρως το τι υπάρχει. Μπορεί κάλλιστα να πρέπει να εξελιχτεί ο εγκέφαλός μας, σαν είδος, ώστε να κατανοεί πλήρως τις επερχόμενες αλήθειες. Όλα τα ενδεχόμενα είναι ανοιχτά και αναπάντητα.

¹⁵ Αριστοτέλης, Μεταφυσικά, Βιβλίο Α, 980α [21], : “όλοι οι άνθρωποι επιθυμούν τη γνώση από τη φύση τους”

Θυμηθείτε επίσης ότι :

“Η έλλειψη απόδειξης, δεν ισοδυναμεί με απόδειξη έλλειψης.”

Την επόμενη φορά που θα εμπλακείτε στα πλοκάμια ενός δισεπίλυτου θέματος, πρέπει να αποφασίσετε αν τελικά πρόκειται για κάποια γκοντελιανή μαύρη τρύπα. Αν είναι έτσι, τότε θυμηθείτε ότι η μοναδική ελπίδα να λυθεί ένα τέτοιο πρόβλημα, είναι μόνον αν θεωρηθεί από κάποιο άλλο ευρύτερο, ισχυρότερο οπτικό πρίσμα. Βγείτε από το πλαίσιο αναφοράς που είστε και περάστε σε κάποιο άλλο ισχυρότερο. Όπως έλεγε και ο Αρχιμήδης:

“Δώς μοι πά στῶ, και τάν γάν κινάσω” !¹⁶

Κλείνοντας την αναφορά μας στα γκοντελιανά μυστήρια, θα τολμήσουμε να αναρωτηθούμε:

Μήπως η ύπαρξη αυτή καθαυτή των γκοντελιανών προτάσεων, με την υποχρεωτική προσπάθεια κατανόησης που μας επιβάλλει, των φυσικών αιτιών αυτής ακριβώς της αδυναμίας απόδειξης, είναι που **εξελίσσει** κάθε σύστημα αναφοράς, στο επόμενο πληρέστερο σύστημα; Μήπως δηλαδή η διανοητική εξέλιξη του ανθρώπινου είδους, εμπεριέχει τους σπόρους της, μέσα στις γκοντελιανές προτάσεις;

A.3 Συλλογικές πλάνες στο πολιτιστικό επίπεδο.

¹⁶ Αρχιμήδης, “Δώσε μου που να σταθώ, και θα κινήσω τη γη”.

B. Η μεθοδολογία της ανάλυσης.

B.1. Θεωρία Αναλυτικής διαδικασίας

B.2.1 Παραδείγματα Ανάλυσης Παρατηρητικότητας: Μια πολυθρόνα που μιλάει.

Σε αυτό το τμήμα θα δώσουμε κάποια παραδείγματα μεθόδων λεπτομερειακής παρατήρησης και ανάλυσης. Μια ξεχασμένη τέχνη.

Άσκηση: Παρατηρήστε προσεκτικά τις φωτογραφίες παρακάτω:



Προσπαθήστε για λίγο να παρατηρήσετε όλες τις πληροφορίες που κρύβονται σε αυτές τις εικόνες. Τι βλέπετε λοιπόν; Μα μια πολυθρόνα γραφείου θα πουν οι περισσότεροι. **Και τι άλλο;** Αυτό είναι το τυπικό λάθος που κάνουν οι πολλοί. Σταματούν στην πρώτη εικόνα. Υπάρχουν πολλά που έχει να μας πει αυτή η πολυθρόνα. Ας δούμε πιο προσεκτικά τι μυστικά έχει να μας αποκαλύψει αυτό το συνηθισμένο αντικείμενο.

Από τι υλικά είναι φτιαγμένη αυτή η πολυθρόνα;

- Η πλάτη και βάση είναι από *δέρμα*.
- Τι χρώμα είναι το δέρμα; *Καφέ χρώμα*.
- Τι άλλο μπορείτε να παρατηρήσετε στο δέρμα; Έχει γυρίσματα από *καμπύλες*. Έχουν ευθείες αυτές οι επιφάνειες; Όχι. Στα γυρίσματα υπάρχουν *μικρές τυχαίες πτυχές*.

- Τι άλλο βλέπετε; Υπάρχουν δύο σειρές από μικρά φουσκωτά *μαξιλαράκια*, στην πλάτη και στο κάθισμα. Ωραία.
- Τι αίσθηση στην αφή, φαντάζεσθε ότι θα δίνει αυτό το δέρμα; Με ποιες λέξεις θα την περιγράφατε; *Απαλή, μαλακή αίσθηση*.
- Αλλά και τι άλλο βλέπετε στο δέρμα; Υπάρχουν *μικρές ζάρες* στη βάση της πλάτης. Τι σημαίνει αυτό; Φυσικά ότι σε αυτή την πολυθρόνα έχουν καθίσει πολλοί άνθρωποι. Αν μπορούσε να μιλήσει, θα είχε σίγουρα πολλές ιστορίες να διηγηθεί!

Από τι άλλα υλικά είναι φτιαγμένη αυτή η πολυθρόνα;

- Ο σκελετός από *ξύλο*.
- Πως στηρίζεται στο έδαφος αυτή η πολυθρόνα; Από ένα σκελετό με *καμπύλες* σε σχήμα S.
- Τι χρώμα είναι το *ξύλο*; *Ανοιχτό καφέ χρώμα*.
- Τι άλλο μπορείτε να παρατηρήσετε στο *ξύλο*; Έχει γυρίσματα από *καμπύλες* και στη διατομή του και στο μήκος του.
- Τι αίσθηση στην αφή, φαντάζεσθε ότι θα δίνει αυτό το *ξύλο*; Με ποιες λέξεις θα την περιγράφατε; Μάλλον μια *ζεστή αίσθηση*.
- Τι άλλο μπορείτε να παρατηρήσετε στο *ξύλο*; Δεν υπάρχουν τα κλασσικά 4 πόδια. Αντί αυτών υπάρχει μία συνεχόμενη καμπύλη. Παρατηρείστε αυτή την καμπύλη. Τι πιθανολογείτε ότι συμβαίνει, όταν κάποιος κάθεται σε αυτή την πολυθρόνα; Η ελαστικότητα του *ξύλου* σε συνδυασμό με το συγκεκριμένο σχέδιο της καμπύλης, επιτρέπει στην πολυθρόνα να *λικνίζεται ελαφρά* πάνω - κάτω.

Ρίξτε μια ματιά τώρα, στο γενικό σύνολο του αντικειμένου. Αναρωτηθείτε:

- Είναι η κατασκευή αρκετά στιβαρή και ασφαλής; Μάλιστα, από την γενική εικόνα προκύπτει ότι θα καθόσασταν με *ασφάλεια*.
- Θα αισθανόμουν άνετα σε μια τέτοια πολυθρόνα; Μάλιστα, από την γενική εικόνα, πάλι προκύπτει ότι θα καθόσασταν με *άνεση*.
- Θα μου επέτρεπε να χαλαρώσω και να ξεκουραστώ; Μια γρήγορη ματιά θα σας διαβεβαιώσει ότι αυτή η πολυθρόνα μπορεί να σας προσφέρει *χαλάρωση* και *ξεκούραση*.

Μια προσεκτική παρατήρηση, μας αποκάλυψε πολλά και ενδιαφέροντα στοιχεία. Πώς θα τα χρησιμοποιήσουμε τώρα όλα αυτά; Για να δούμε τι έχουμε σημειώσει με πλάγια γράμματα στη φάση της συλλογής των παρατηρήσεων. Κατά τη σειρά της παρατήρησης έχουμε μαζέψει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

«δέρμα - καφέ χρώμα - καμπύλες - μικρές πτυχές - μαξιλαράκια - απαλή, μαλακή αίσθηση - μικρές τυχαίες ζάρες - ξύλο - καμπύλες - ανοιχτό καφέ χρώμα - καμπύλες - ζεστή αίσθηση - λικνίζεται ελαφρά - ασφάλεια - άνεση - χαλάρωση - ξεκούραση»

Σταματήστε τώρα την ανάγνωση αυτού του κειμένου, «αδειάστε» για λίγο το μυαλό σας, αλλάξτε στο νου σας, όπως λένε οι φωτογράφοι και οι ζωγράφοι, **το**

κάδρο αναφοράς, αφήστε να περάσουν ένα – δύο κενά λεπτά. Σταματήστε τώρα την ανάγνωση και κοιτάξτε αδιάφορα το χώρο γύρω σας.



Σε όσους από σας ξαναγύρισαν μετά το απαραίτητο διάλειμμα, στην ανάγνωση αυτού του κειμένου, αξίζουν συγχαρητήρια. Η επιμονή σας σύντομα θα ανταμειφθεί. Ξεχάστε για λίγο οτιδήποτε λέγαμε στις προηγούμενες σελίδες και διαβάστε προσεκτικά και συγκεντρωμένοι τις παρακάτω σειρές:

«*δέρμα - καφέ χρώμα - καμπύλες - μικρές πτυχές - μαξιλαράκια - απαλή, μαλακή αίσθηση - μικρές τυχαίες ζάρες - ξύλο - καμπύλες - ανοιχτό καφέ χρώμα - καμπύλες - ζεστή αίσθηση - λικνίζεται ελαφρά - ασφάλεια - άνεση - χαλάρωση - ξεκούραση*»

Τι βλέπετε «πίσω» από τις γραμμές; Μήπως αρχίζουν να εμφανίζονται κάποιες άλλες εικόνες στο νου σας; Τι σας θυμίζουν όλα αυτά; Υπάρχει μήπως κάτι μέσα σας, που αρχίζει να καταλαβαίνει, τι άλλο συμβαίνει με αυτές τις λέξεις; Ποιος κοινός παρονομαστής τις ενώνει; Θα ξέρετε ότι είσαστε στα σωστά αχνάρια, τη στιγμή που θα πείτε το περίφημο «Αχά!», αυτό το σύγχρονο επιφώνημα χαράς της ανακάλυψης, που αντιστοιχεί στο «Εύρηκα» του Αρχιμήδη. Αν πάλι μέχρι τώρα δεν σας λένε τίποτε οι παραπάνω λέξεις, σταματήστε και ξαναδιαβάστε τες, με μια μικρή δόση υποψίας: Τι θέλει να πει ο ποιητής; Αργά ή γρήγορα το μυαλό σας θα φωτιστεί από την ανακάλυψη. Για να δούμε τώρα τι ανακαλύψατε.

Διαβάζοντας ξανά τις παραπάνω γραμμές, θα αισθανθήκατε σίγουρα να σας τυλίγει, ένα συναίσθημα οικειότητας. Κάπου τα ξέρετε όλα αυτά. Τα έχετε ξαναδεί. Πού; Μα στη *φύση*. Ανάμεσα στα διάφορα που θα ήρθαν στο νου σας, θα είναι σίγουρα, ακόμα και αν δεν είπατε την ίδια τη λέξη, ότι αυτό που χαρακτηρίζει όλα όσα διαβάσατε, είναι ότι απαντώνται στη φύση. Αλλά ας εμβαθύνουμε περισσότερο. Από τις 27 λέξεις, αν αφαιρέσουμε τη λέξη «ξύλο», οι υπόλοιπες 26, μπορούν να βρεθούν στον *άνθρωπο*. Αλλά κυριότερα στο *γυναικείο φύλο*. Αλλά από όλο το θηλυκό στοιχείο, τι πιο συγκεκριμένο μας έρχεται στο νου; Μα φυσικά, η *αγκαλιά*. Οι πιο τολμηροί, μπορεί να σκεφτούν και τη *μήτρα*. Καμπύλοι μαλακοί αναπνευστικοί χώροι χαλάρωσης, ασφάλειας, ζεστασιάς, απόλαυσης. Χώροι για νανούρισμα. *Χώροι επιθυμητοί από όλους*.

Πάμε τώρα για την τελική ευθεία. Ας ενώσουμε τα επιμέρους στοιχεία. Τι είχαμε στην αρχή; Μια πολυθρόνα γραφείου. Την παρατηρήσαμε προσεκτικά, εντοπίσαμε και σημειώσαμε όλα τα χαρακτηριστικά της. Και που μας παραπέμπουν όλα αυτά τα χαρακτηριστικά; Στη *φύση*, στον *άνθρωπο*, στο *γυναικείο φύλο*, στην *αγκαλιά*, στην *αρχέγονη μήτρα*, στην *επιθυμία να χαλαρώσει κανείς απολαυστικά*. Το αντικείμενο που θέλαμε να παρατηρήσουμε μας αποκάλυψε με λίγη προσπάθεια τα μυστικά του. Διαβάσαμε πίσω από την εικόνα του, είδαμε αυτά που μας έκρυβε..

Αφού φτάσαμε έως εδώ, μήπως τάχα τώρα τελειώσαμε την προσεκτική μας ανάλυση; Καλά το φανταστήκατε! Όχι ακόμα. Λείπει μια τελευταία πινελιά. Ας αναρωτηθούμε λοιπόν:

- *Τι θέση έχει αυτή η πολυθρόνα στο χώρο;* Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία του βλέμματος, αυτού που κάθετα στην πολυθρόνα, με αυτήν εκείνου που κάθετα στο γραφείο, είναι 45 μοίρες (διαγώνια). Είναι τυχαίο αυτό; Μάλλον όχι. Τι θα συνέβαινε, αν η πολυθρόνα ήταν

στραμμένη ακριβώς απέναντι από αυτόν που κάθετα στο γραφείο, δηλαδή στις 0 μοίρες; Πως λέμε δύο ανθρώπους που κάθονται με τα μέτωπα αντικριστά; Τους λέμε «αντιμέτωπους». Αυτό θυμίζει ανάκριση, σύγκρουση και διάφορα άλλα αρνητικά. Δεν θα θέλαμε βέβαια μια τέτοια κατάσταση, ειδικά αφού κάναμε τόσο κόπο να τον κάνουμε να νοιώσει καλά, βάζοντάς τον να καθίσει σε αυτήν την πολυθρόνα! Τι θα συνέβαινε, αν η πολυθρόνα ήταν στραμμένη κάθετα από αυτόν που κάθετα στο γραφείο, δηλαδή στις 90 μοίρες; Θα ήταν αφύσικο για αυτόν που κάθετα στην πολυθρόνα. Για να δει αυτόν που κάθετα στο γραφείο, θα έπρεπε να στρέψει την κεφαλή του στις 90 μοίρες δεξιά, δηλαδή στο τέρμα της δυνατής περιστροφής μιας ανθρώπινης κεφαλής. Έτσι η μέση λύση ανάμεσα στις 0 και στις 90 μοίρες, είναι οι 45 μοίρες. *Είναι η πιο άνετη θέση για συζήτηση.*

Τώρα, με φωτισμένη ολόκληρη την ανάλυση, μπορεί να μας δημιουργηθούν πιθανόν, κάποια νέα ερωτήματα. Ας τα δούμε:

Άραγε σε ποιους χώρους ταιριάζει αυτή η πολυθρόνα; Προφανώς εκεί όπου χρειάζεται να αισθανθεί κάποιος οικεία, άνετα και όπου μπορεί να αρχίσει μια χαλαρή συζήτηση, χωρίς να βιάζεται να την τελειώσει. Θα ταίριαζε μια τέτοια πολυθρόνα σε ένα fast food; Όχι βέβαια. Εκεί πας να φας κάτι στα γρήγορα και μετά να φύγεις. Για αυτό το λόγο, οι καρέκλες των fast food, είναι συνήθως άβολες! Πρέπει να φας και να φύγεις γρήγορα, ώστε να καθίσει ο επόμενος.

Ένα άλλο ερώτημα είναι το εξής: Είχε ο σχεδιαστής αυτής της πολυθρόνας τέτοια συνειδητή πρόθεση, να δημιουργήσει κάτι με τόσο βαθύ νόημα; Η πιθανότερη απάντηση είναι ότι μάλλον όχι. Οι σχεδιαστές είναι καλλιτέχνες, και οι καλλιτέχνες έχουν εξορισμού το χάρισμα να βουτάνε στα αρχετυπικά πρότυπα του ανθρώπινου είδους. Επιστρέφοντας από τη βουτιά τους, ανασύρουν συχνά πολύτιμους θησαυρούς. Αν τους ρωτήσεις πως το κάνουν αυτό, θα σου απαντήσουν ότι αυτό είναι απλά θέμα έμπνευσης. Οι ίδιοι συνήθως δεν ασχολούνται ποτέ με την κατανόηση των έργων τους. Αυτό είναι δουλειά των κριτικών και των αναλυτών.

Το ίδιο ερώτημα μπορούμε να το στρέψουμε και προς τον ιδιοκτήτη αυτής της πολυθρόνας: Είναι δυνατόν να είχε ο αγοραστής αυτής της πολυθρόνας τέτοια συνειδητή πρόθεση, ώστε να αποκτήσει κάτι με τόσο βαθύ νόημα; Και εδώ η πιθανότερη απάντηση είναι ότι μάλλον όχι. Όταν κάτι σου αρέσει, το αγοράζεις και το κρατάς για χρόνια, συνήθως δεν το αναλύεις στα συστατικά του ώστε να το κατανοήσεις πλήρως. Συνήθως κάθεται και το απολαμβάνεις!

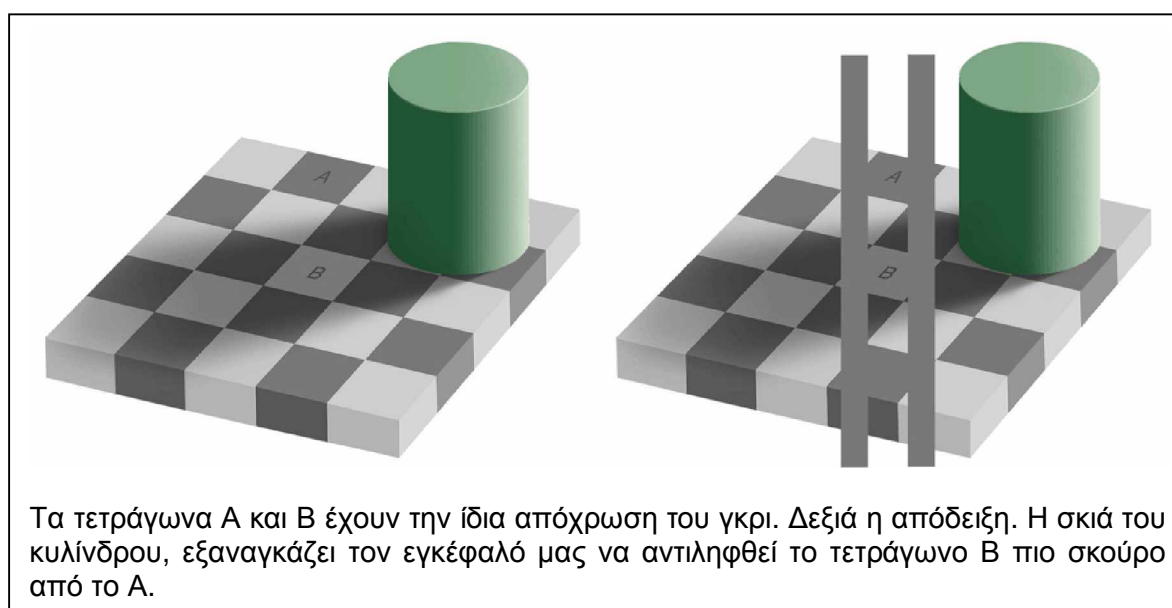
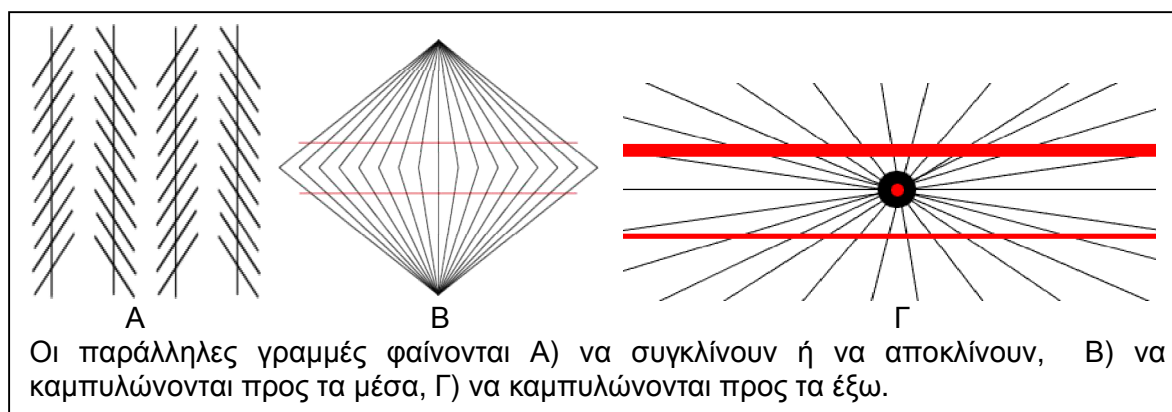
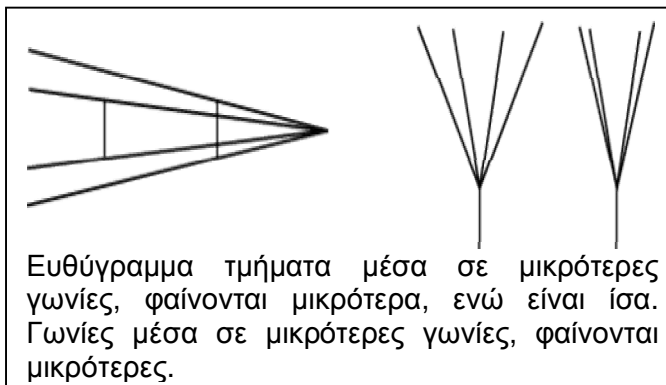
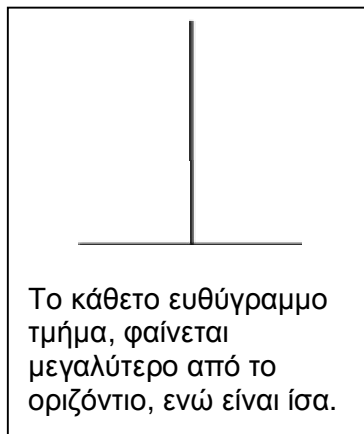
Αλλά τότε γιατί μπήκαμε στον κόπο να αναλύσουμε μια πολυθρόνα και την κρυφή σημασία της; Διότι πολύ απλά τα φαινόμενα της ζωής, συνδέονται μεταξύ τους, είτε το καταλαβαίνουμε είτε όχι. Αυτός που μπορεί να βλέπει και να ακούει, πίσω από όσα φαίνονται, αποκτά μια επιπλέον δύναμη για να αντιμετωπίσει τα όποια θέματα ήθελε προκύψουν στο μέλλον. Αυτή η δύναμη αποκτάται με την συχνή εξάσκηση και είναι απολύτως μέσα στις δυνατότητες όλων των ανθρώπων.

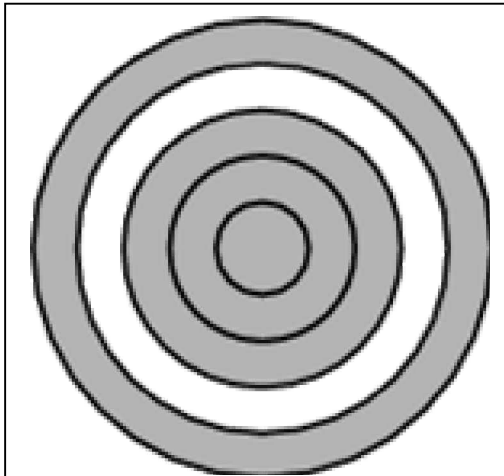
Το ταξίδι μας στον αθέατο κόσμο της πολυθρόνας, ήταν τελικά αρκετά μεγάλο. Από που ξεκινήσαμε και πόσα μυστήρια διαλευκάναμε! Τώρα τι λέτε, θα

μπορούσαμε να εφαρμόσουμε αυτήν την τεχνική ανάλυσης, σε άλλα πράγματα και θέματα; Προφανώς και μπορούμε! Είτε πρόκειται για ταινία του Αγγελόπουλου, είτε για την τηλεοπτική εμφάνιση των πολιτικών, είτε για τους ανθρώπους που έχουμε σχέσεις, οι βασικές αρχές της αναλυτικής μεθοδολογίας είναι ίδιες.

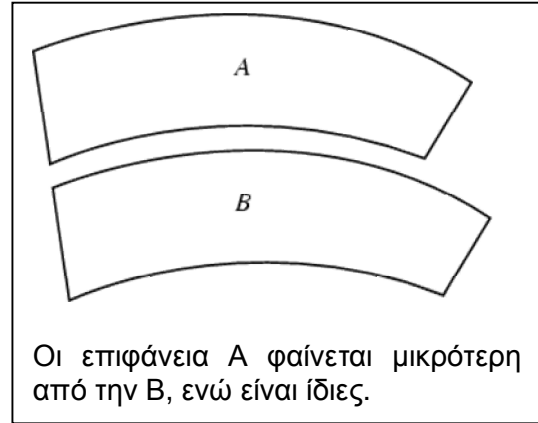
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

1.1 Οφθαλμαπάτες: Μαθηματικές και Γεωμετρικές.

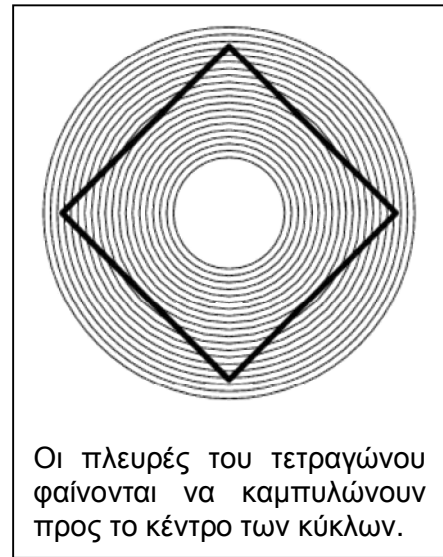




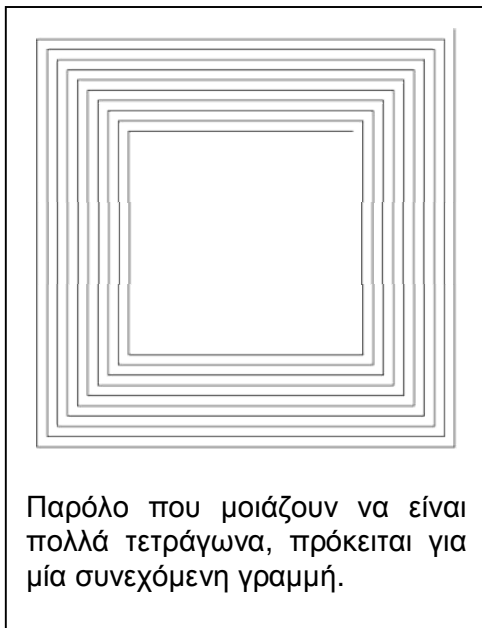
Η εσωτερική γκριζα κυκλική επιφάνεια μοιάζει μεγαλύτερη από τον εξωτερικό γκριζο δακτύλιο, ενώ είναι ίδιες, (ίδιο εμβαδόν = $9 \cdot \pi$)
 $\pi \cdot 3^2 = \pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 4^2$



Οι επιφάνεια A φαίνεται μικρότερη από την B, ενώ είναι ίδιες.



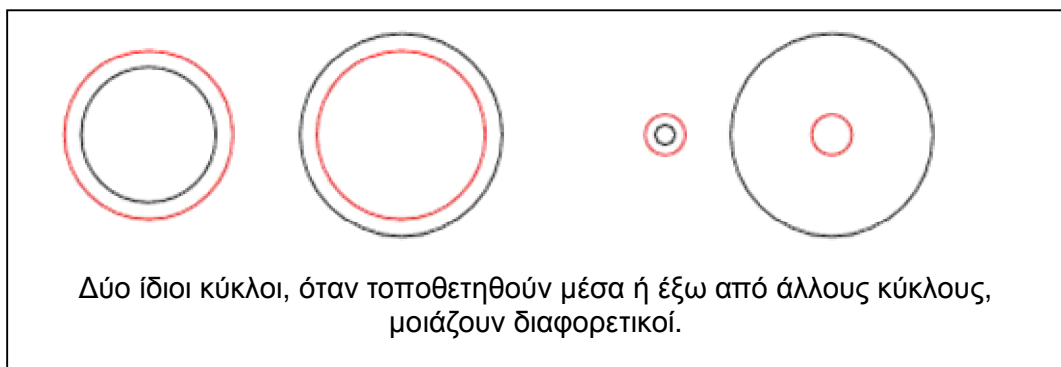
Οι πλευρές του τετραγώνου φαίνονται να καμπυλώνουν προς το κέντρο των κύκλων.



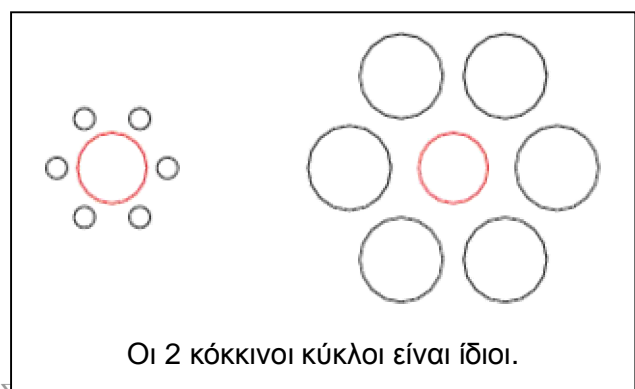
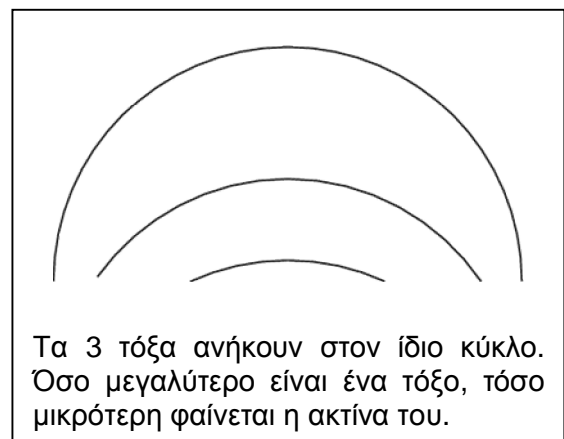
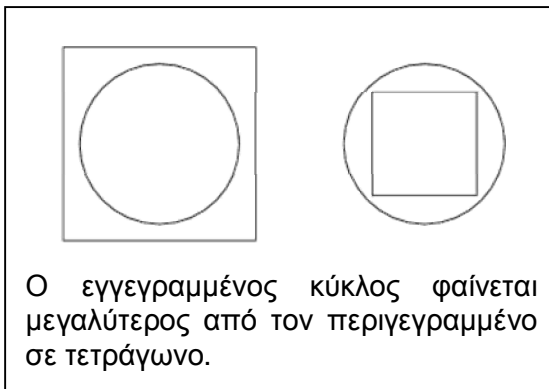
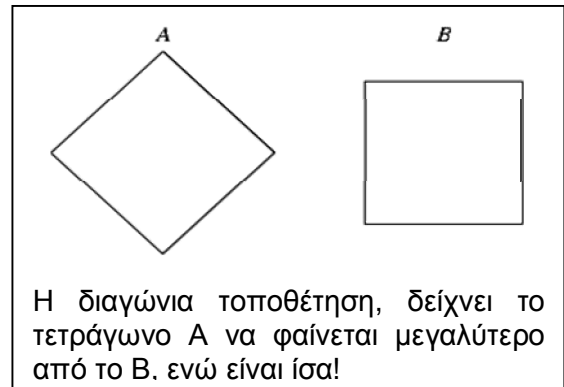
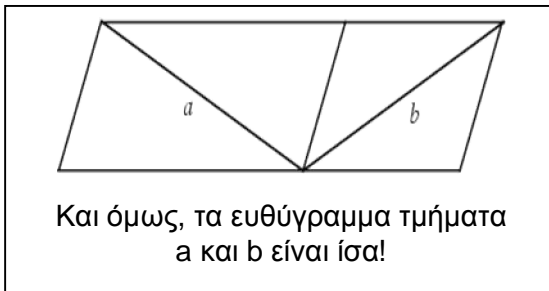
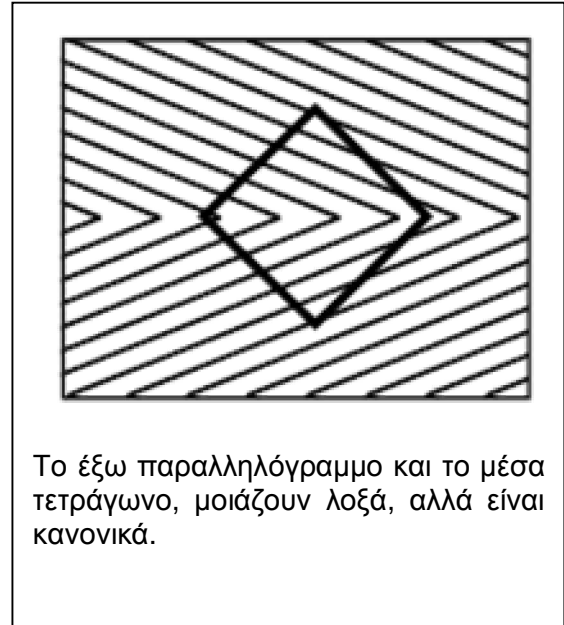
Παρόλο που μοιάζουν να είναι πολλά τετράγωνα, πρόκειται για μία συνεχόμενη γραμμή.

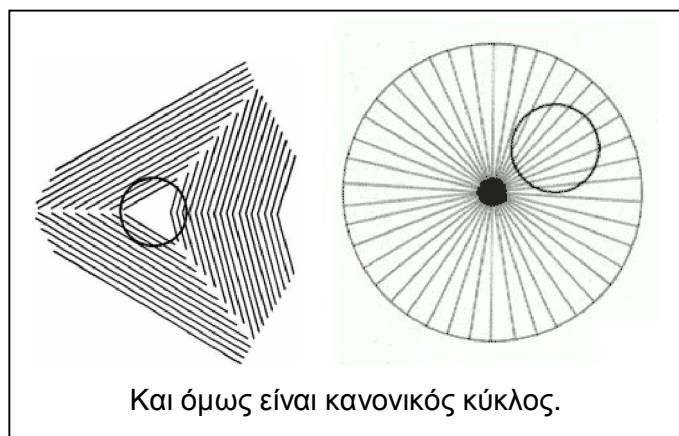
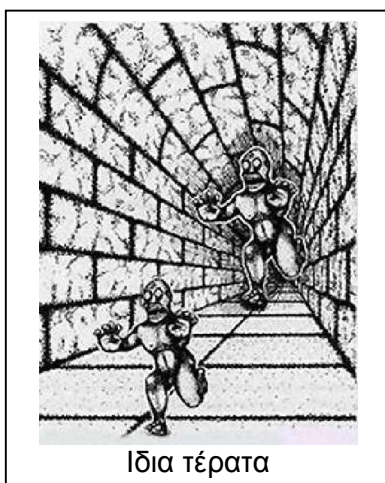
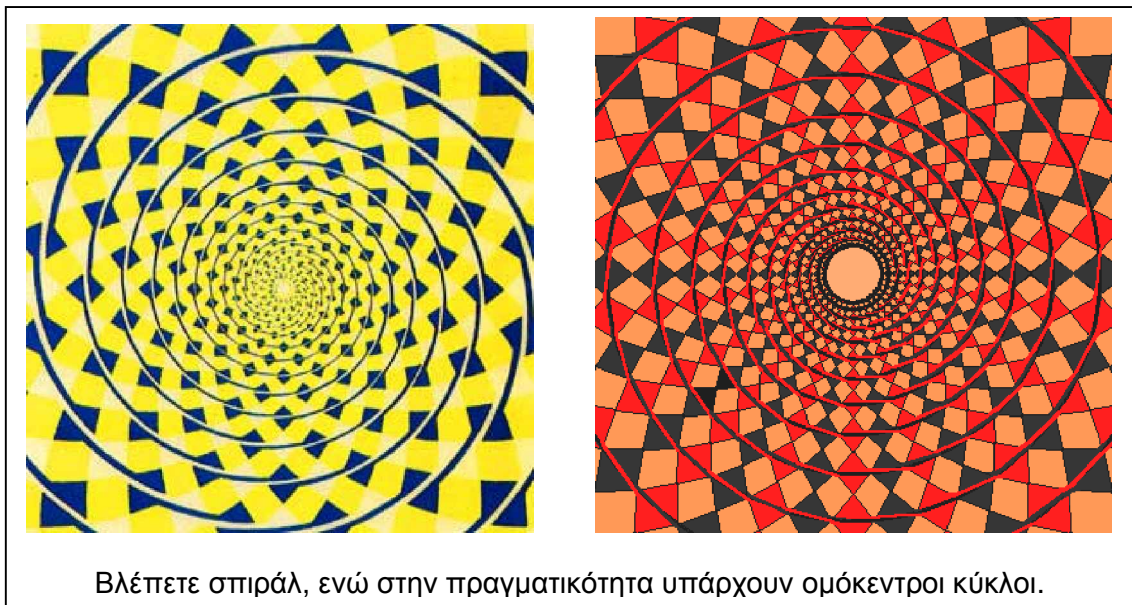
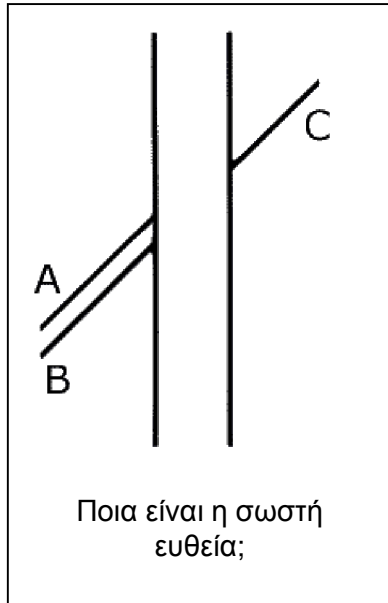


Τα τμήματα AB και AC είναι ίδια !

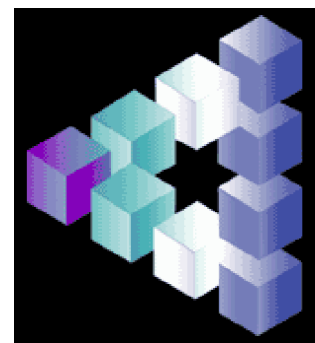
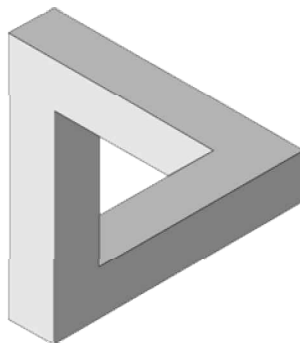
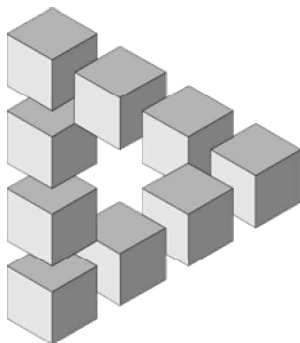
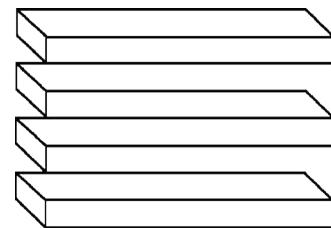
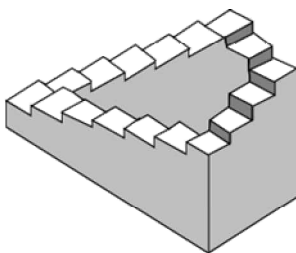
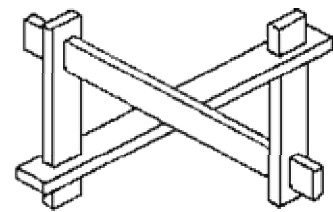
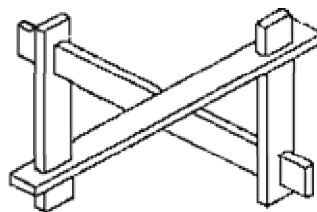
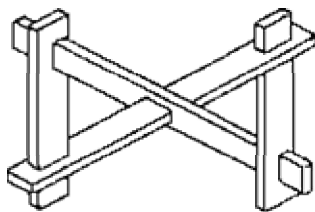
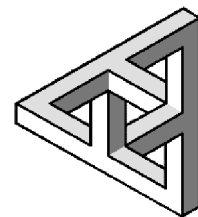
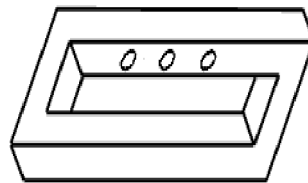
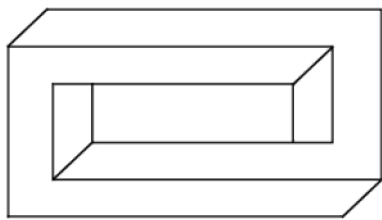
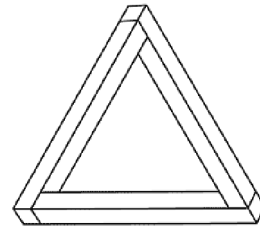
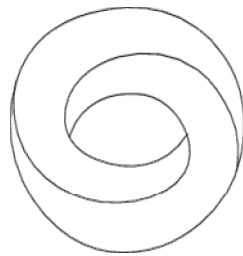
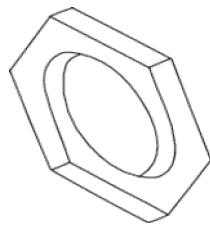


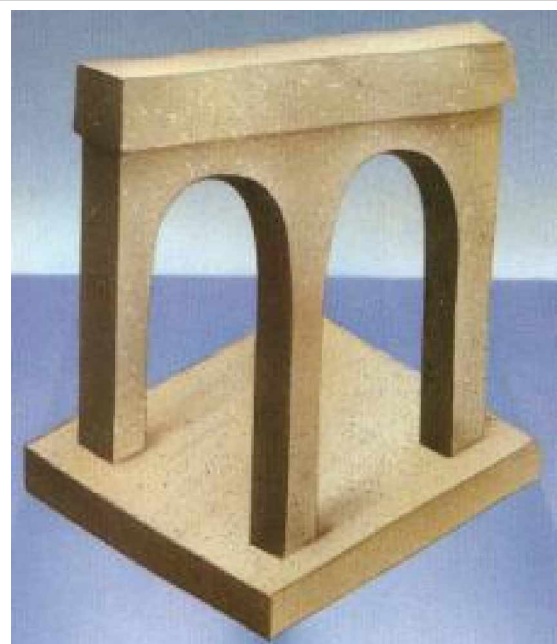
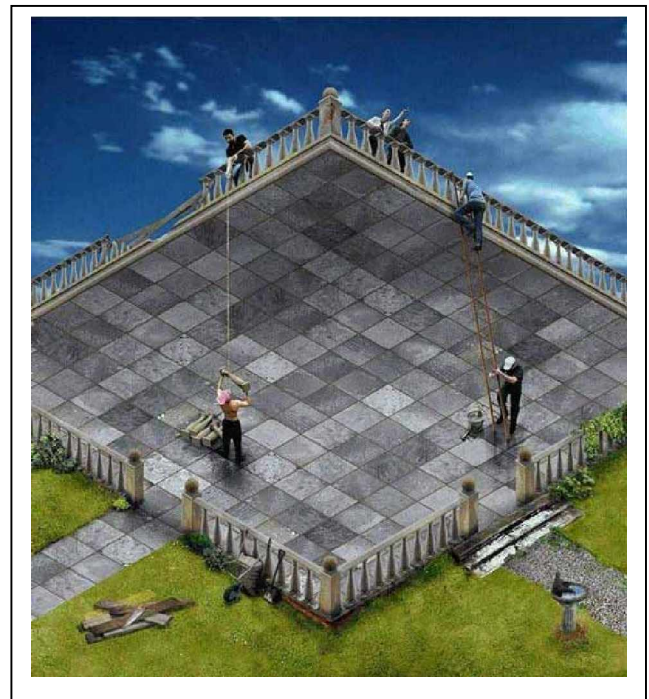
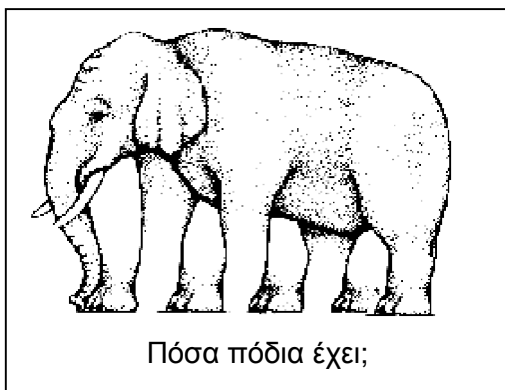
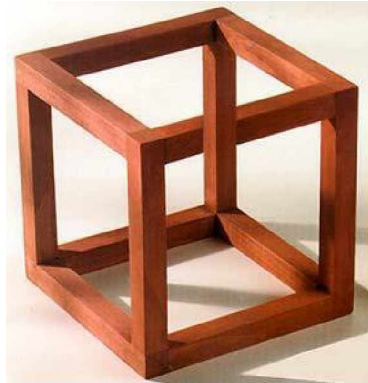
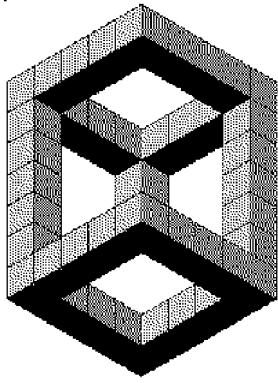
Δύο ίδιοι κύκλοι, όταν τοποθετηθούν μέσα ή έξω από άλλους κύκλους, μοιάζουν διαφορετικοί.





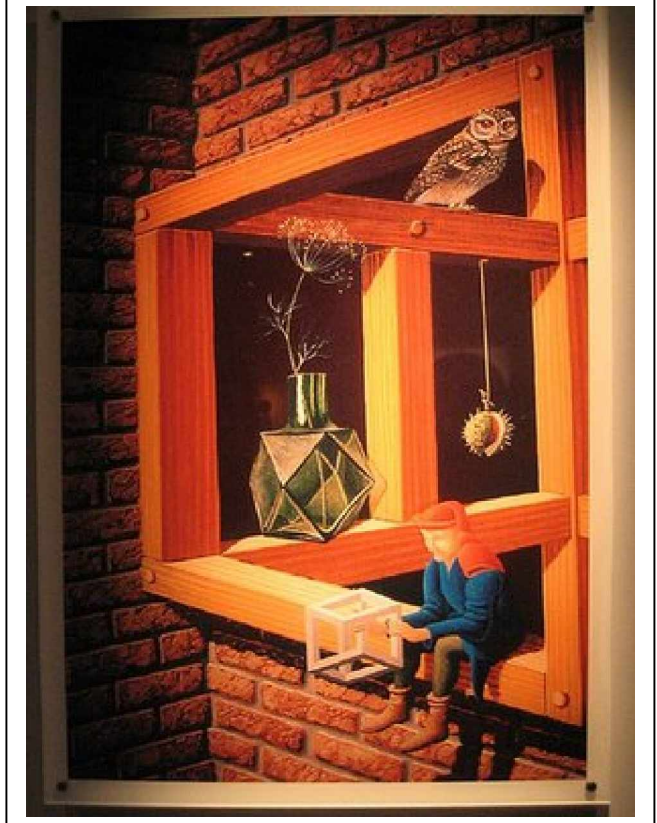
1.2 Οφθαλμαπάτες: Αδύνατα σχήματα.



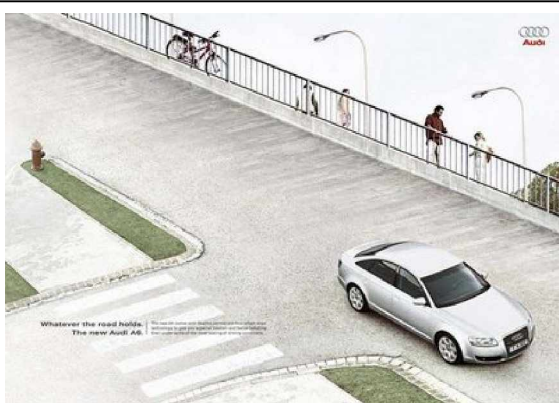
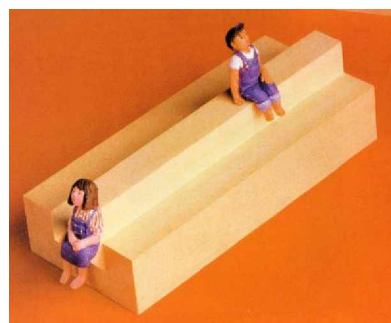




Μαύρη Τρύπα!



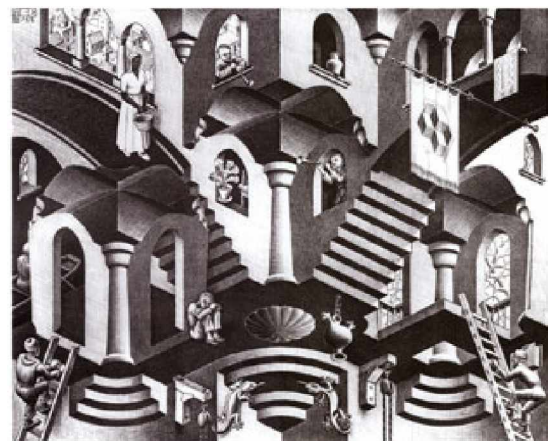
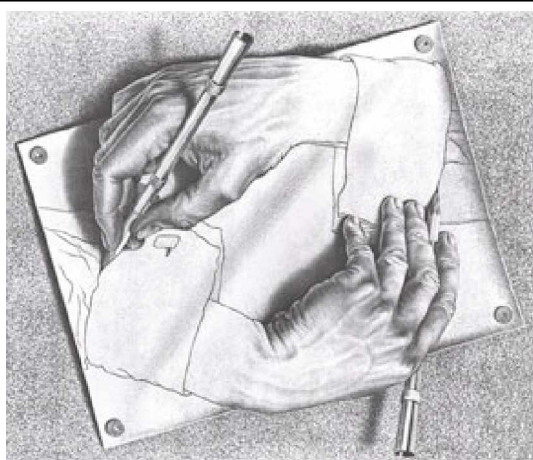
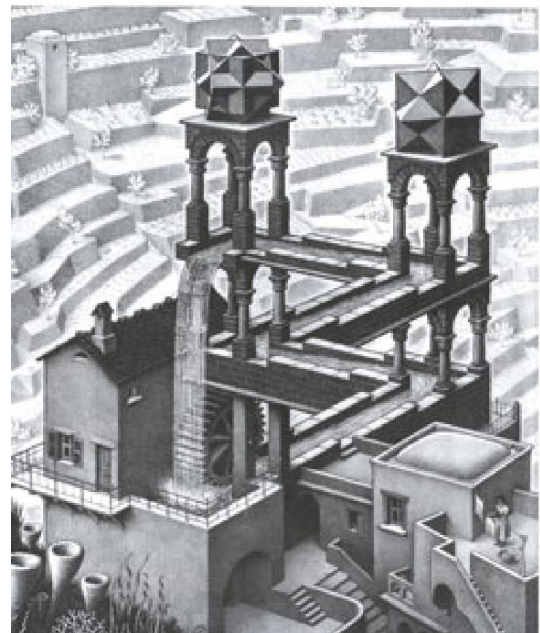
Και όμως, είναι ζωγραφική σε πεζόδρομο!



Η τέχνη στην υπηρεσία της Διαφήμισης.

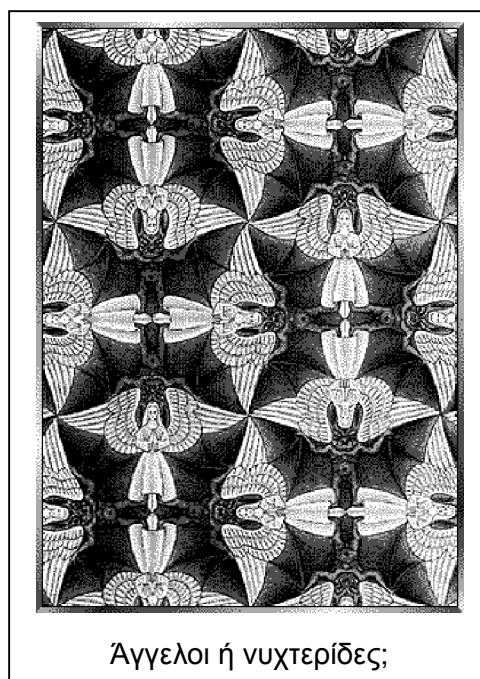
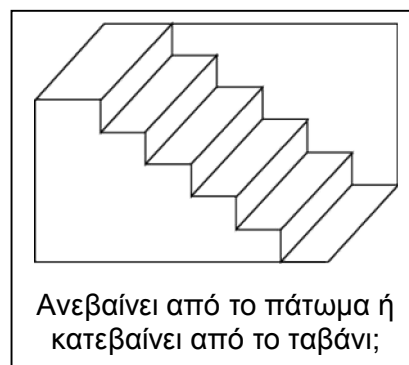
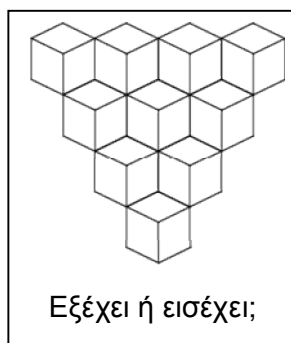


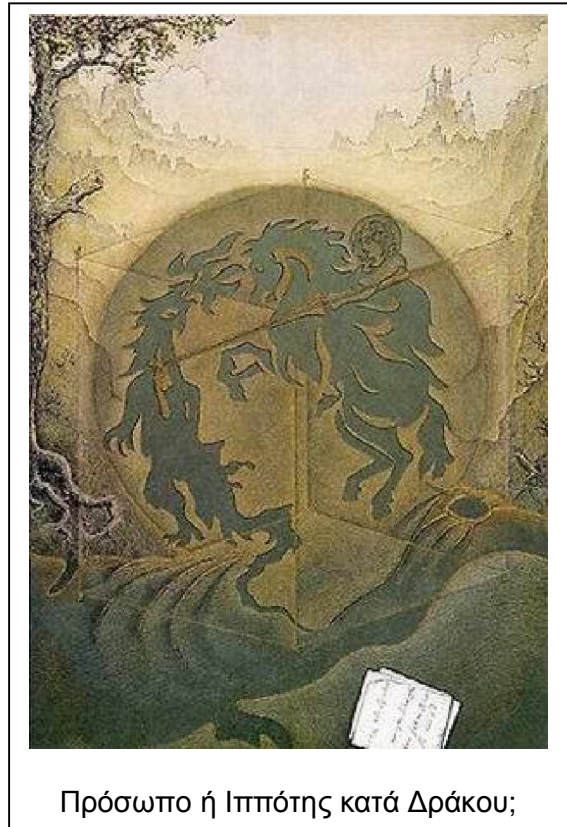
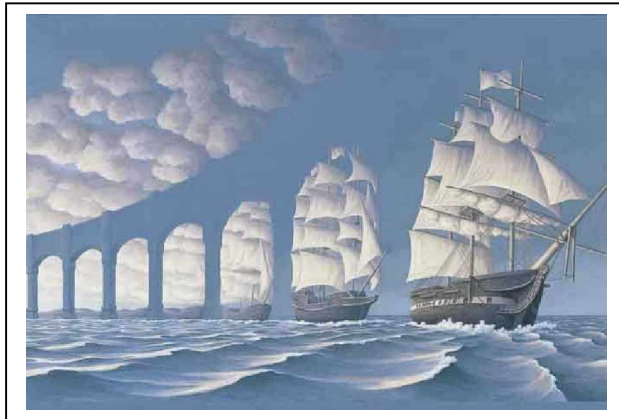
Πού πάει η σκάλα;



Escher ο Ανεπανάληπτος!

1.3 Οφθαλμαπάτες: Διφορούμενες εικόνες.





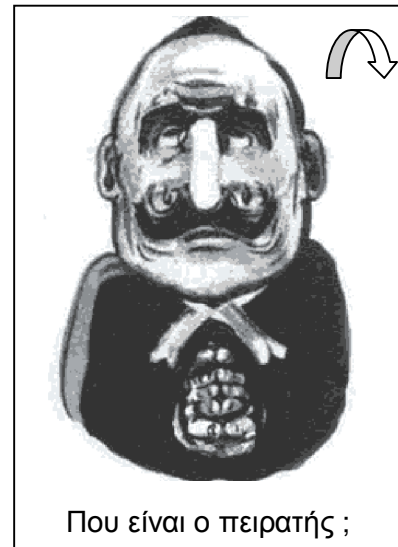
Πρόσωπο ή
Εσκιμώος;

Πρόσωπο ή Ιππότης κατά Δράκου;

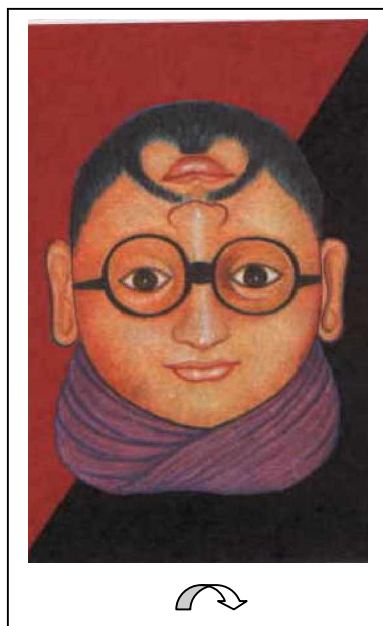
Που είναι ο βάτραχος;



Σαξοφωνίστας ή νέα;



Που είναι ο πειρατής ;



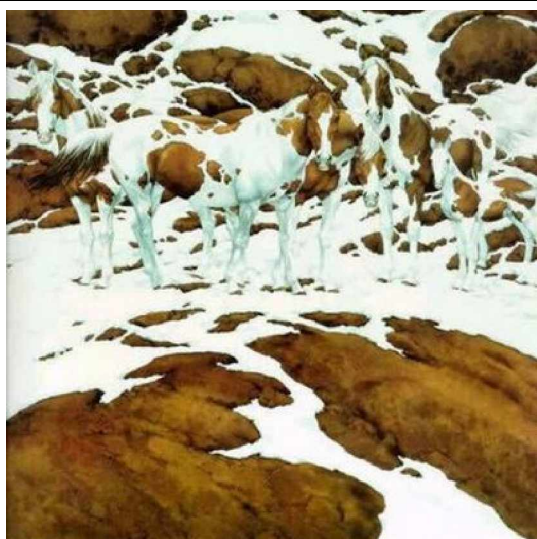
Νέα ή γριά;



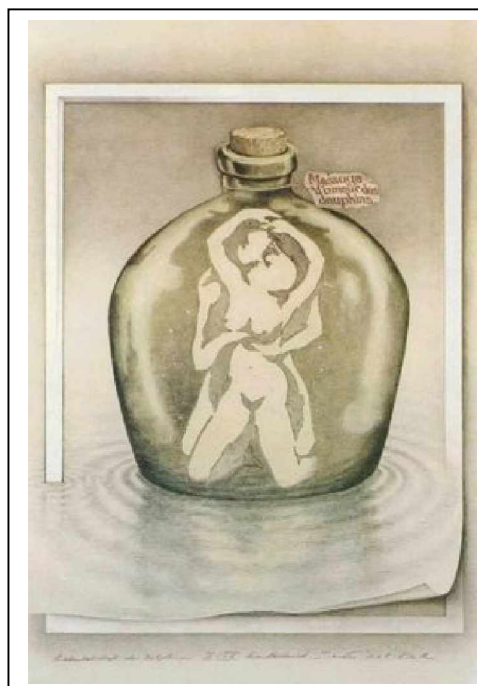
Alter ego



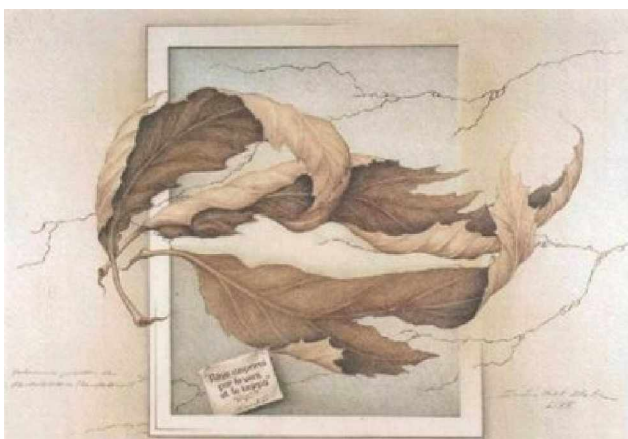
Παγιδευμένοι !



Πού είναι τα άλογα;



Τα παιδιά βλέπουν μόνο τα δελφίνια!



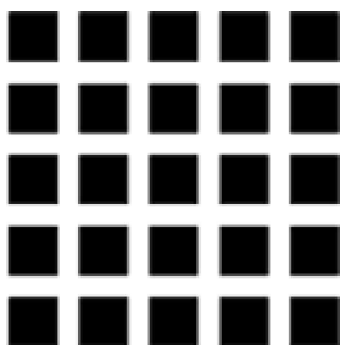
Τα παιδιά βλέπουν μόνο τα φύλλα!



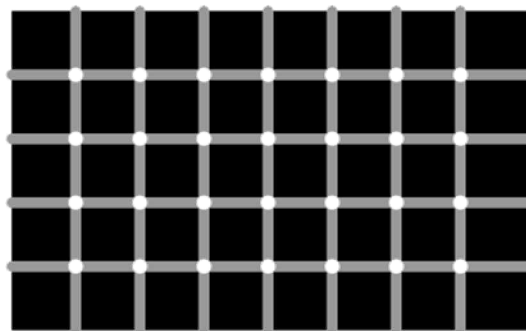
OPTICAL ή ILLUSION ή και τα δύο;



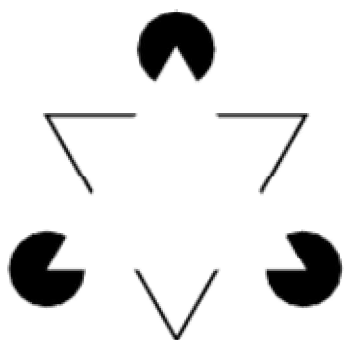
1.4 Οφθαλμαπάτες: Μεικτάσματα και ψευδο-κινήσεις.



Ανάμεσα στις γωνίες των τετραγώνων φαίνεται σαν να υπάρχουν γκρίζοι δίσκοι.



Ανάμεσα στις γωνίες των τετραγώνων φαίνεται να αναβοσβήνουν μαύροι δίσκοι.



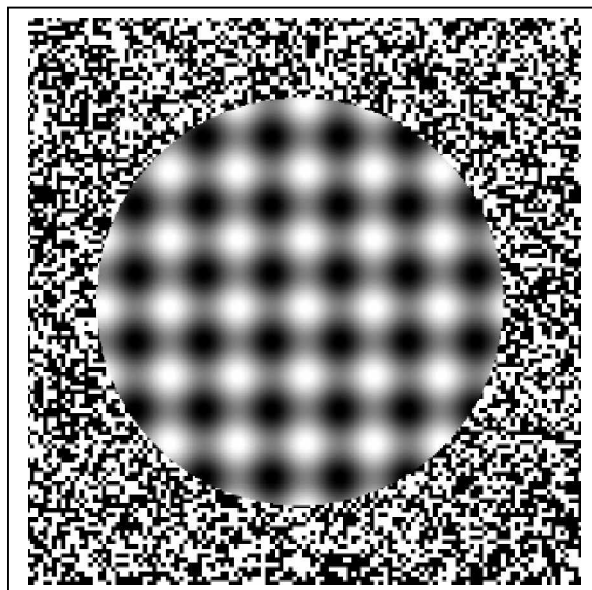
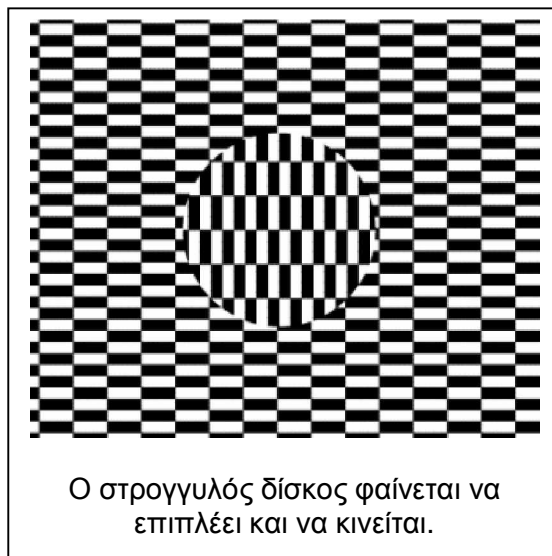
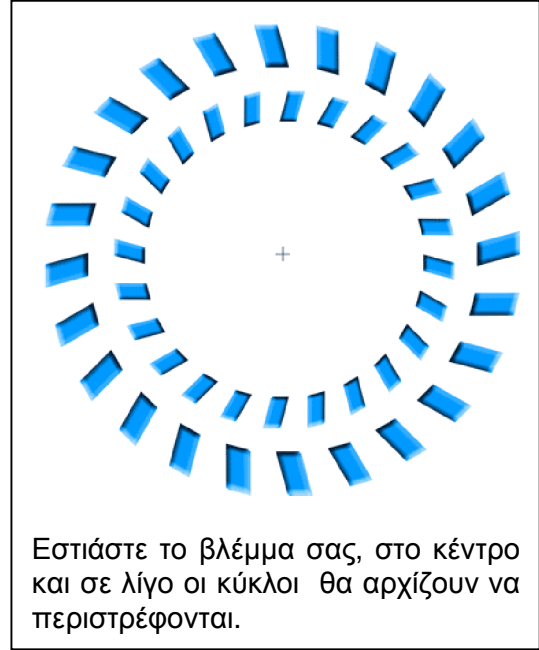
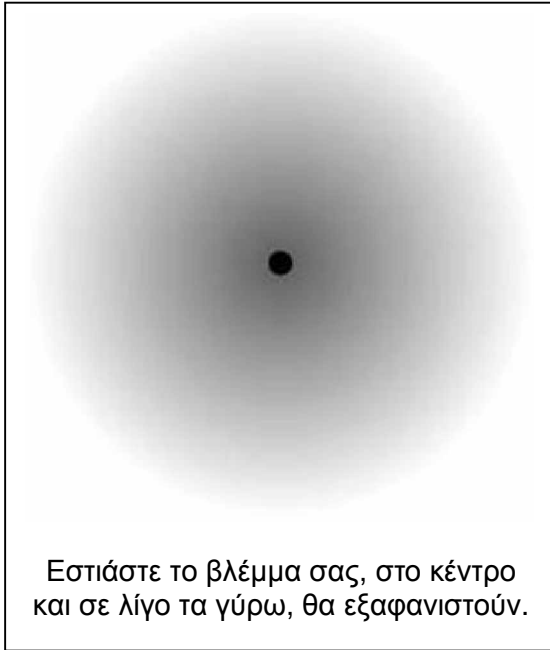
Φαίνεται σαν να υπάρχει ένα έντονο άσπρο τρίγωνο.

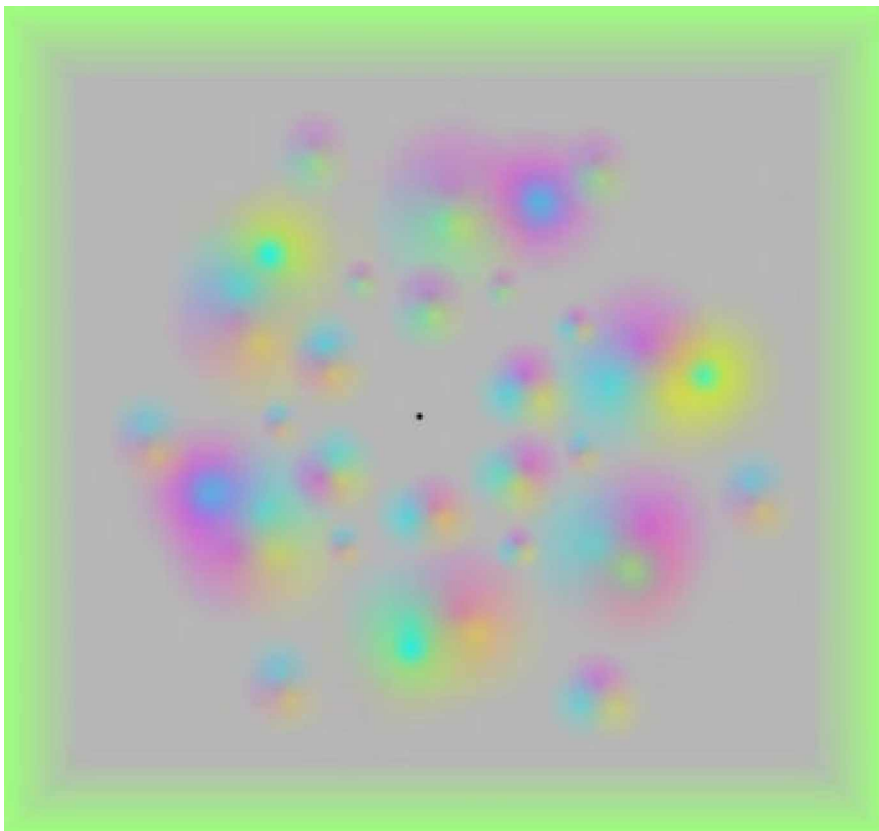
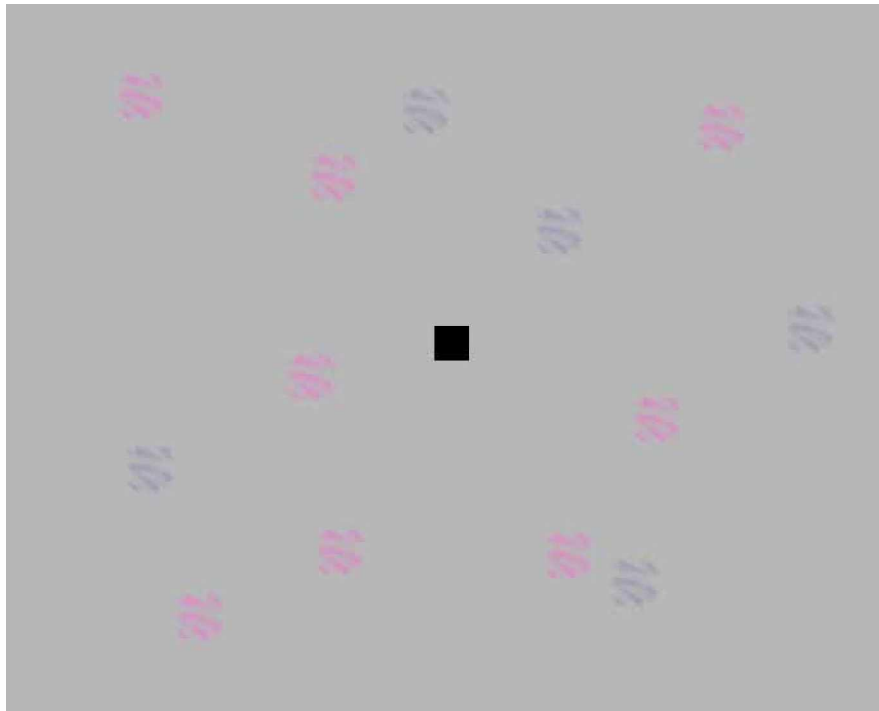


Καθώς κοιτάτε στο κέντρο, η φωτεινότητα αυξομειώνεται!



Στο σημείο που ενώνονται οι άσπρες ή μαύρες γραμμές φαίνεται να σχηματίζονται έντονοι κυκλικοί δίσκοι.

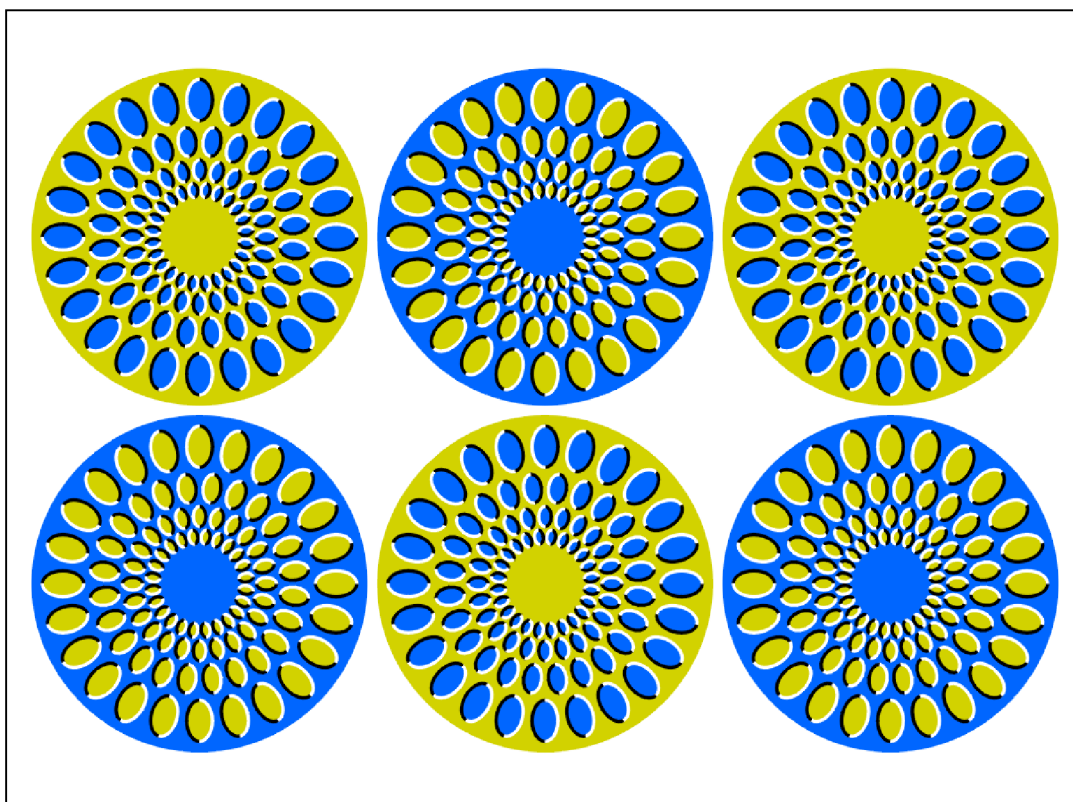
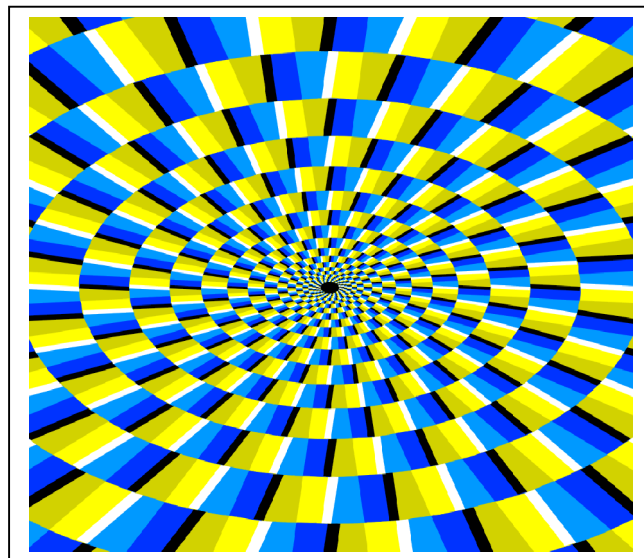
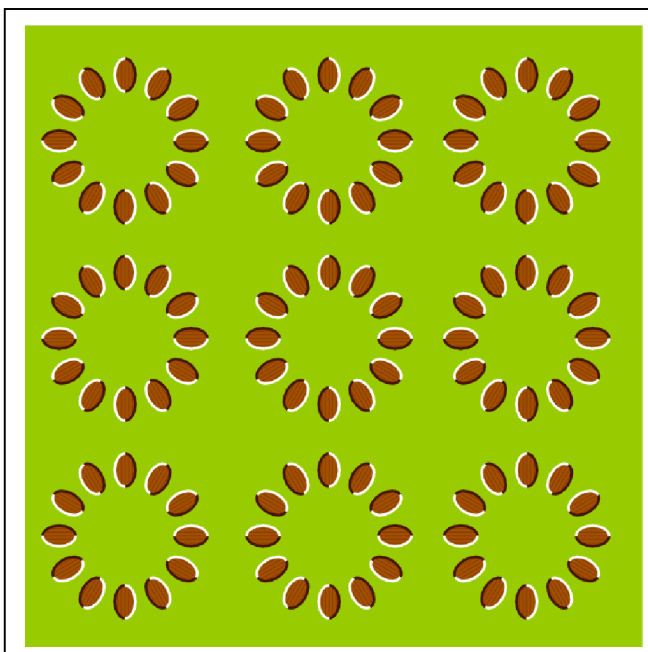




Εστιάστε το βλέμμα σας, στο κέντρο και σε λίγο τα κομψατά, θα εξαφανιστούν.

1.5 Οφθαλμαπάτες: Σχήματα που Περιστρέφονται ή Κυματίζουν.

Αυτή η κατηγορία σχημάτων είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακή σε τηλεόραση ή σε οθόνη υπολογιστή. Ατυχώς δεν αποδίδουν καλά στην εκτύπωση στο χαρτί. Ωστόσο ενδεικτικά παραθέτουμε κάποια δείγματα. Για εκπληκτικά αποτελέσματα επισκεφτείτε την ιστοσελίδα: www.psy.ritsumei.ac.jp/~akitaoka/ritsumei/index-e.html



1.6 Οφθαλμαπάτες: Στερεογράμματα.

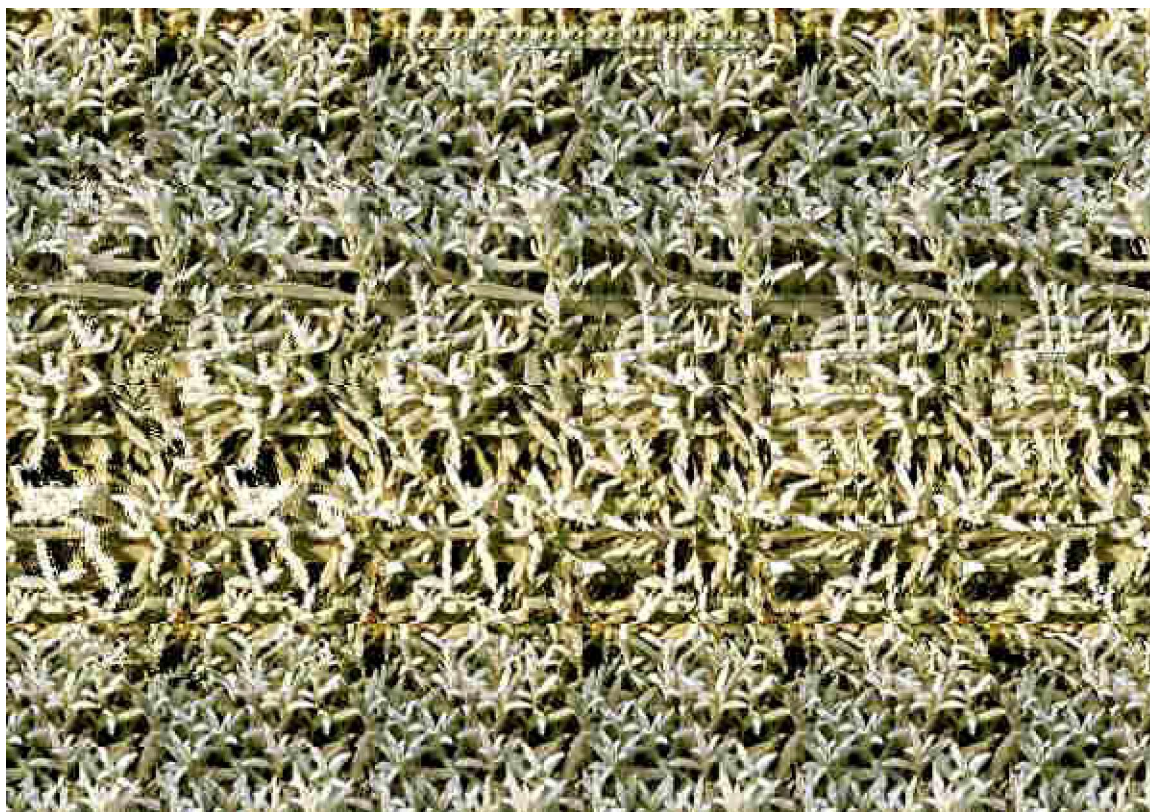
Η τεχνική για να δει κάποιος ένα στερεόγραμμα είναι απλή αλλά απαιτεί στην αρχή, σχετική υπομονή και συγκέντρωση:

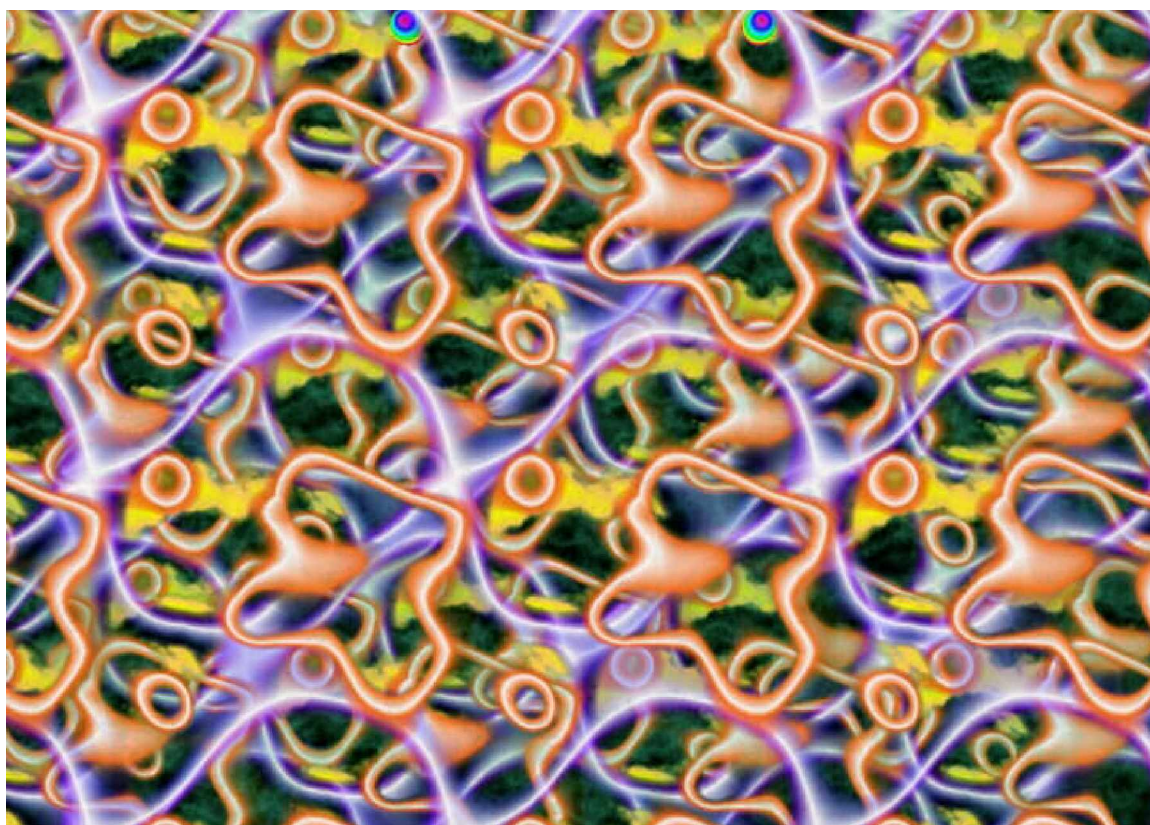
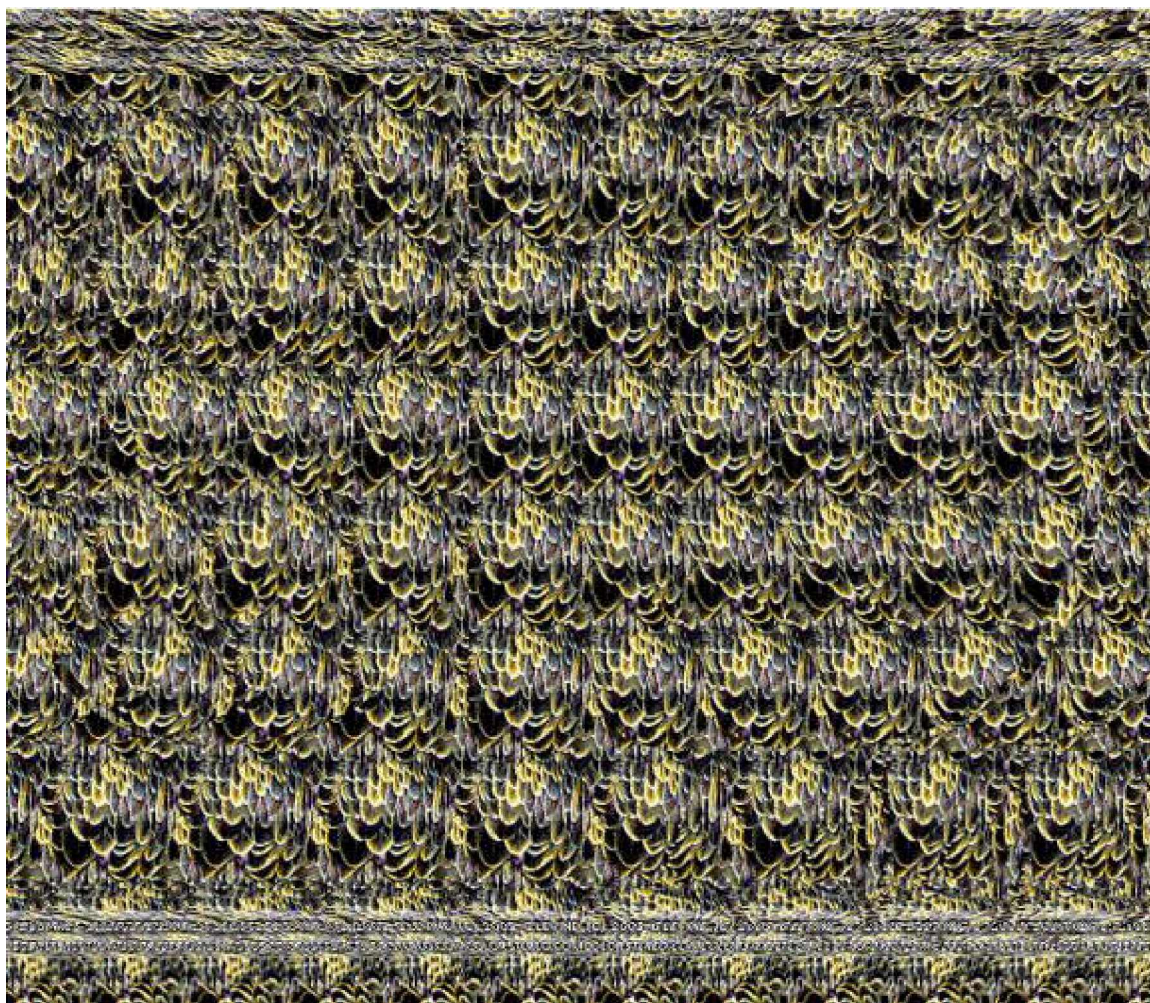
Καθώς έχετε την εικόνα μπροστά σας, κοιτάξτε την άκρη της μύτης σας, αλληθωρίζοντας ελαφρά. Η εικόνα τώρα αποκτά δύο είδωλα. Εστιάστε σταδιακά το βλέμμα σας, από την μύτη σας προς την εικόνα, αφήνοντας την περιφερειακή σας όραση να βλέπει. Σε κάποιο σημείο ανάμεσα, θα δείτε το στερεόγραμμα.

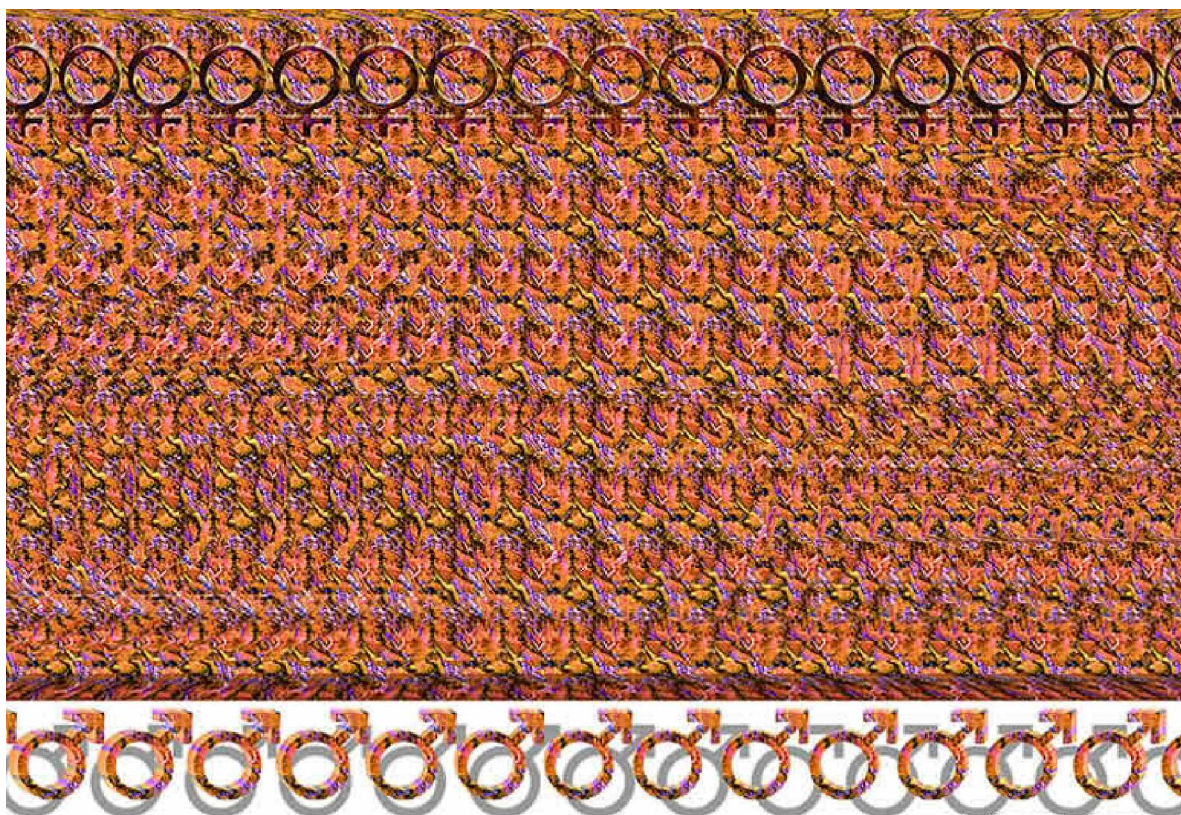
Κάποιοι προτιμούν μια άλλη μέθοδο. Ξεκινούν με την εικόνα κολλημένη στη μύτη τους και την απομακρύνουν σταδιακά, κοιτώντας την εικόνα περιφερειακά και όχι εστιασμένα. Όπως και να έχει, αξίζει την προσπάθεια. Το στερεόγραμμα θα σας δείξει έναν πραγματικά αλλιώτικο κόσμο.

Η πρώτη φορά είναι πάντα λίγο δύσκολη. Μπορεί να χρειαστεί και μία ώρα προσπάθειας. Οι επόμενες φορές είναι σχετικά εύκολες. Πάντα όμως χρειάζεται συγκέντρωση και κατάλληλη εστίαση του βλέμματος. Επιμείνετε συστηματικά. Το εκπληκτικό αποτέλεσμα θα σας ανταμείψει!

Δοκιμάστε να «δείτε» τα δείγματα που παραθέτουμε παρακάτω:







ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

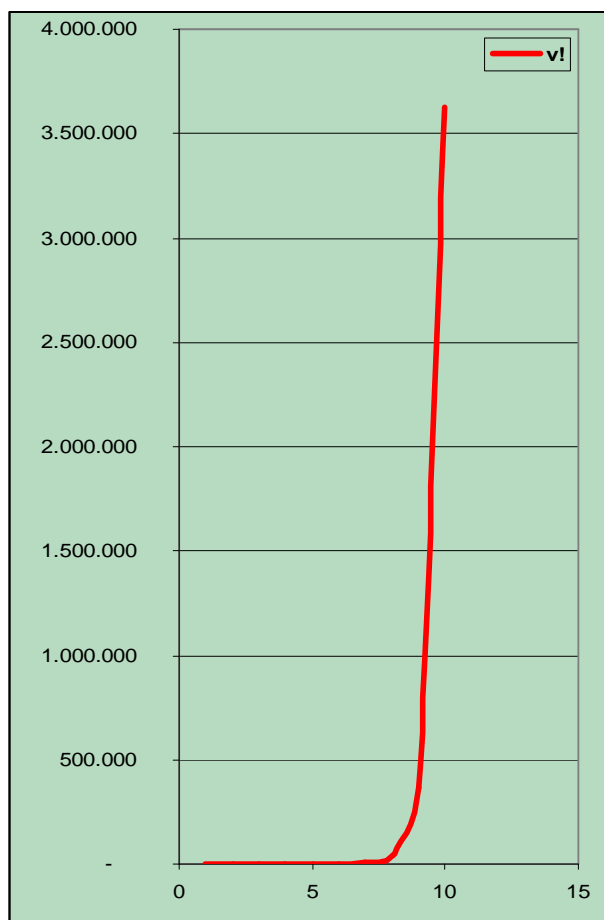
Σε αυτό το κείμενο υπάρχουν αναφορές σε κάποιες έννοιες των μαθηματικών που ίσως να μην θυμόσαστε καλά. Θα τις συνοψίσουμε περιληπτικά εδώ:

2.1 ΤΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟ ΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ !

Το σύμβολο $n!$ δηλώνει τον αριθμό: $1*2*3*...n$, πχ $5! = 1*2*3*4*5 = 120$.

Οι παραγοντικοί αριθμοί αυξάνονται τόσο γρήγορα, που ο εγκέφαλός μας αδυνατεί να τους παρακολουθήσει εύκολα. Δείτε το διάγραμμα:

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5.040
8	40.320
9	362.880
10	3.628.800



2.2 ΟΙ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Με τη λέξη συνδυασμό εννοούμε ότι σε μια σειρά πραγμάτων {α, β, γ ...} δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, η θέση, στην οποία αναφέρονται.

Δηλαδή πχ. τα: {α, β, γ}, {α, γ, β}, {β, α, γ}, {β, γ, α} κλπ, είναι ένας μόνο συνδυασμός. Μας ενδιαφέρει μόνο, να είναι μέσα, αυτά τα τρία πράγματα, το α, το β και το γ, σε οποιαδήποτε σειρά μεταξύ τους.

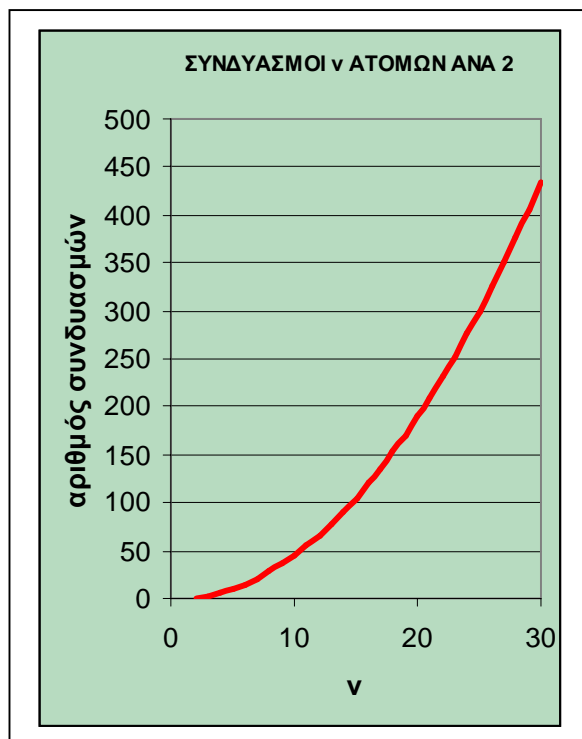
Ο αριθμός όλων των δυνατών συνδυασμών v ατόμων σε ομάδες από k άτομα η κάθε μία, δίδεται από τον τύπο: $v! / (k! * (v-k)!)$

Έστω ότι έχουμε μια ομάδα από 5 άτομα. Πόσοι είναι όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί τους, σε υποομάδες των 2 ατόμων; Σύμφωνα με τον τύπο είναι:

$$5! / (2! * (5-2)!) = 120 / (2 * 3!) = 120 / (2 * 6) = 120 / 12 = 10 \text{ συνδυασμοί.}$$

Ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών αυξάνεται γρήγορα και ο εγκέφαλός μας αδυνατεί να τους παρακολουθήσει εύκολα. Δείτε το διάγραμμα για την περίπτωση συνδυασμών υποομάδων των 2 ατόμων από ομάδες μέχρι τα 30 άτομα:

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ v ΑΤΟΜΩΝ ΑΝΑ 2	
Αριθμός ατόμων	Αριθμός συνδυασμών
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
8	28
9	36
10	45
11	55
12	66
13	78
14	91
15	105
16	120
17	136
18	153
19	171
20	190
21	210
22	231
23	253
24	276
25	300
26	325
27	351
28	378
29	406
30	435



2.3 ΤΟ ΣΙΤΑΡΙ ΚΑΙ ΤΟ ΣΚΑΚΙ

Αριθμός Τετραγώνου	Αριθμός σπόρων σταριού	Αριθμός Τετραγώνου	Αριθμός σπόρων σταριού
1	1	33	4.294.967.296
2	2	34	8.589.934.592
3	4	35	17.179.869.184
4	8	36	34.359.738.368
5	16	37	68.719.476.736
6	32	38	137.438.953.472
7	64	39	274.877.906.944
8	128	40	549.755.813.888
9	256	41	1.099.511.627.776
10	512	42	2.199.023.255.552
11	1.024	43	4.398.046.511.104
12	2.048	44	8.796.093.022.208
13	4.096	45	17.592.186.044.416
14	8.192	46	35.184.372.088.832
15	16.384	47	70.368.744.177.664
16	32.768	48	140.737.488.355.328
17	65.536	49	281.474.976.710.656
18	131.072	50	562.949.953.421.312
19	262.144	51	1.125.899.906.842.624
20	524.288	52	2.251.799.813.685.248
21	1.048.576	53	4.503.599.627.370.496
22	2.097.152	54	9.007.199.254.740.992
23	4.194.304	55	18.014.398.509.481.984
24	8.388.608	56	36.028.797.018.963.968
25	16.777.216	57	72.057.594.037.927.936
26	33.554.432	58	144.115.188.075.855.872
27	67.108.864	59	288.230.376.151.711.744
28	134.217.728	60	576.460.752.303.423.488
29	268.435.456	61	1.152.921.504.606.846.976
30	536.870.912	62	2.305.843.009.213.693.952
31	1.073.741.824	63	4.611.686.018.427.387.904
32	2.147.483.648	64	9.223.372.036.854.775.808

2.4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΤΩΣΗΣ ΤΩΝ ΓΕΝΕΘΛΙΩΝ

Αριθμός ατόμων ομάδας (ν)	Αριθμός των υπόλοιπων ατόμων (365-ν)	Πιθανότητα να μην έχει ίδια γενέθλια με τους προηγούμενους ο ν μόνος του ((365-ν)/ν)	Πιθανότητα να μην έχει ίδια γενέθλια ο ν με κανέναν από τους Προηγούμενους (π)	Πιθανότητα να έχει ίδια γενέθλια ο ν με κάποιον από τους Προηγούμενους (1-π)
1	365	100,00%	100,00%	0,00%
2	364	99,73%	99,73%	0,27%
3	363	99,45%	99,18%	0,82%
4	362	99,18%	98,36%	1,64%
5	361	98,90%	97,29%	2,71%
6	360	98,63%	95,95%	4,05%
7	359	98,36%	94,38%	5,62%
8	358	98,08%	92,57%	7,43%
9	357	97,81%	90,54%	9,46%
10	356	97,53%	88,31%	11,69%
11	355	97,26%	85,89%	14,11%
12	354	96,99%	83,30%	16,70%
13	353	96,71%	80,56%	19,44%
14	352	96,44%	77,69%	22,31%
15	351	96,16%	74,71%	25,29%
16	350	95,89%	71,64%	28,36%
17	349	95,62%	68,50%	31,50%
18	348	95,34%	65,31%	34,69%
19	347	95,07%	62,09%	37,91%
20	346	94,79%	58,86%	41,14%
21	345	94,52%	55,63%	44,37%
22	344	94,25%	52,43%	47,57%
23	343	93,97%	49,27%	50,73%
24	342	93,70%	46,17%	53,83%
25	341	93,42%	43,13%	56,87%
26	340	93,15%	40,18%	59,82%
27	339	92,88%	37,31%	62,69%
28	338	92,60%	34,55%	65,45%
29	337	92,33%	31,90%	68,10%
30	336	92,05%	29,37%	70,63%
31	335	91,78%	26,95%	73,05%
32	334	91,51%	24,67%	75,33%
33	333	91,23%	22,50%	77,50%
34	332	90,96%	20,47%	79,53%
35	331	90,68%	18,56%	81,44%
36	330	90,41%	16,78%	83,22%
37	329	90,14%	15,13%	84,87%
38	328	89,86%	13,59%	86,41%
39	327	89,59%	12,18%	87,82%
40	326	89,32%	10,88%	89,12%

41	325	89,04%	9,68%	90,32%
42	324	88,77%	8,60%	91,40%
43	323	88,49%	7,61%	92,39%
44	322	88,22%	6,71%	93,29%
45	321	87,95%	5,90%	94,10%
46	320	87,67%	5,17%	94,83%
47	319	87,40%	4,52%	95,48%
48	318	87,12%	3,94%	96,06%
49	317	86,85%	3,42%	96,58%
50	316	86,58%	2,96%	97,04%
51	315	86,30%	2,56%	97,44%
52	314	86,03%	2,20%	97,80%
53	313	85,75%	1,89%	98,11%
54	312	85,48%	1,61%	98,39%
55	311	85,21%	1,37%	98,63%
56	310	84,93%	1,17%	98,83%
57	309	84,66%	0,99%	99,01%
58	308	84,38%	0,83%	99,17%
59	307	84,11%	0,70%	99,30%
60	306	83,84%	0,59%	99,41%
61	305	83,56%	0,49%	99,51%
62	304	83,29%	0,41%	99,59%
63	303	83,01%	0,34%	99,66%
64	302	82,74%	0,28%	99,72%
65	301	82,47%	0,23%	99,77%
66	300	82,19%	0,19%	99,81%
67	299	81,92%	0,16%	99,84%
68	298	81,64%	0,13%	99,87%
69	297	81,37%	0,10%	99,90%
70	296	81,10%	0,08%	99,92%
71	295	80,82%	0,07%	99,93%
72	294	80,55%	0,05%	99,95%
73	293	80,27%	0,04%	99,96%
74	292	80,00%	0,04%	99,96%
75	291	79,73%	0,03%	99,97%
76	290	79,45%	0,02%	99,98%
77	289	79,18%	0,02%	99,98%
78	288	78,90%	0,01%	99,99%
79	287	78,63%	0,01%	99,99%
80	286	78,36%	0,01%	99,99%
81	285	78,08%	0,01%	99,99%
82	284	77,81%	0,01%	99,99%
83	283	77,53%	0,00%	100,00%

2.5 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΤΩΣΗΣ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΚΑΤΑΓΩΓΗΣ

Αριθμός ατόμων ομάδας (v)	Αριθμός των υπόλοιπων ($52-v$)	Πιθανότητα να μην έχει ίδια καταγωγή με τους προηγούμενους ο v μόνος του ($(52-v)/v$)	Πιθανότητα να μην έχει ίδια καταγωγή ο v με κανέναν από τους προηγούμενους (π)	Πιθανότητα να έχει ίδια καταγωγή ο v με κάποιον από τους προηγούμενους ($1-\pi$)
1	52	100,00%	100,00%	0,00%
2	51	98,08%	98,08%	1,92%
3	50	96,15%	94,30%	5,70%
4	49	94,23%	88,86%	11,14%
5	48	92,31%	82,03%	17,97%
6	47	90,38%	74,14%	25,86%
7	46	88,46%	65,59%	34,41%
8	45	86,54%	56,76%	43,24%
9	44	84,62%	48,03%	51,97%
10	43	82,69%	39,71%	60,29%
11	42	80,77%	32,08%	67,92%
12	41	78,85%	25,29%	74,71%
13	40	76,92%	19,45%	80,55%
14	39	75,00%	14,59%	85,41%
15	38	73,08%	10,66%	89,34%
16	37	71,15%	7,59%	92,41%
17	36	69,23%	5,25%	94,75%
18	35	67,31%	3,54%	96,46%
19	34	65,38%	2,31%	97,69%
20	33	63,46%	1,47%	98,53%
21	32	61,54%	0,90%	99,10%
22	31	59,62%	0,54%	99,46%
23	30	57,69%	0,31%	99,69%
24	29	55,77%	0,17%	99,83%
25	28	53,85%	0,09%	99,91%
26	27	51,92%	0,05%	99,95%
27	26	50,00%	0,02%	99,98%
28	25	48,08%	0,01%	99,99%
29	24	46,15%	0,01%	99,99%
30	23	44,23%	0,00%	100,00%

2.6 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΥΜΠΤΩΣΗΣ ΤΩΝ ΙΔΙΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Αριθμός ατόμων ομάδας (<i>v</i>)	Αριθμός των Υπόλοιπων (<i>30-v</i>)	Πιθανότητα να μην έχει διαβάσει το ίδιο βιβλίο με τους προηγούμενους ο <i>v</i> μόνος του ($\frac{30-v}{v}$)	Πιθανότητα να μην έχει διαβάσει το ίδιο βιβλίο ο <i>v</i> με κανέναν από τους προηγούμενους (π)	Πιθανότητα να έχει διαβάσει το ίδιο βιβλίο ο <i>v</i> με κάποιον από τους προηγούμενους ($1-\pi$)
1	30	100,00%	100,00%	0,00%
2	29	96,67%	96,67%	3,33%
3	28	93,33%	90,22%	9,78%
4	27	90,00%	81,20%	18,80%
5	26	86,67%	70,37%	29,63%
6	25	83,33%	58,64%	41,36%
7	24	80,00%	46,92%	53,08%
8	23	76,67%	35,97%	64,03%
9	22	73,33%	26,38%	73,62%
10	21	70,00%	18,46%	81,54%
11	20	66,67%	12,31%	87,69%
12	19	63,33%	7,80%	92,20%
13	18	60,00%	4,68%	95,32%
14	17	56,67%	2,65%	97,35%
15	16	53,33%	1,41%	98,59%
16	15	50,00%	0,71%	99,29%
17	14	46,67%	0,33%	99,67%
18	13	43,33%	0,14%	99,86%
19	12	40,00%	0,06%	99,94%
20	11	36,67%	0,02%	99,98%
21	10	33,33%	0,01%	99,99%
22	9	30,00%	0,00%	100,00%

2.7 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΝΝΗΣΗΣ ΤΩΝ ΦΥΛΩΝ !

Η διωνυμική κατανομή εφαρμόζεται σε περιπτώσεις υπολογισμού της πιθανότητας, να συμβούν **ακριβώς και μόνο** (κ) τιμές επιτυχίας (ή αποτυχίας,) του ίδιου επαναλαμβανόμενου γεγονότος με σταθερή πιθανότητα (π), επί συνόλου (ν) δοκιμών. Επειδή σε κάθε ανεξάρτητη δοκιμή, το γεγονός δέχεται δυο μόνο τιμές, (συμβαίνει ή δεν συμβαίνει) λέγεται δι-ώνυμο. Η πιθανότητα της διωνυμικής κατανομής, δίδεται από τον τύπο

:

$$\Delta(\kappa, \nu, \pi) = \text{Συνδυασμοί} (\nu \text{ ανά } \kappa) * \pi^{\kappa} * (1-\pi)^{\nu-\kappa}$$

Στην περίπτωση του **μεγάλου** μαιευτηρίου, στα 45 παιδιά που γεννιούνται ημερησίως, το 60% είναι 27. Σύμφωνα με την απαίτηση του προβλήματος, πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες να γεννηθούν 28 ή 29 ή 30 ή...45 αγόρια, επί συνόλου 45. Εφαρμόζουμε τον τύπο της διωνυμικής κατανομής:

Αγόρια	Πιθανότητα
28	3,872%
29	2,362%
30	1,311%
31	0,660%
32	0,301%
33	0,123%
34	0,045%
35	0,015%
36	0,004%
37	0,001%
38	0,000%
39	0,000%
40	0,000%
41	0,000%
42	0,000%
43	0,000%
44	0,000%
45	0,000%

Σύνολο **8,695%**

Αντιστοιχούμε επί 365 ημερών του έτους, την αθροιστική πιθανότητα 8,695% * 365 = **31,74** ημέρες.

Στην περίπτωση του **μικρού** μαιευτηρίου, στα 15 παιδιά που γεννιούνται ημερησίως, το 60% είναι 9. Σύμφωνα με την απαίτηση του προβλήματος, πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες να γεννηθούν 10 ή 11 ή 12 ή...15 αγόρια, επί συνόλου 15. Εφαρμόζουμε τον τύπο της διωνυμικής κατανομής:

Αγόρια	Πιθανότητα
10	10,098%
11	4,777%
12	1,657%
13	0,398%
14	0,059%
15	0,004%

Σύνολο **16,994%**

Αντιστοιχούμε επί 365 ημερών του έτους, την αθροιστική πιθανότητα 16,994% * 365 = **62,03** ημέρες.

2.8 ΤΟ ΣΤΡΙΨΙΜΟ ΤΟΥ ΝΟΜΙΣΜΑΤΟΣ !

Έστω ότι στρίβουμε ένα νόμισμα 5 διαδοχικές φορές. Θέλουμε να μάθουμε ποια είναι η πιθανότητα (π) να έρθει 4 **ακριβώς και μόνο** συνολικά φορές κεφάλι.

Αν αρχίσουμε να αυξάνουμε *γραμμικά* όλα τα νούμερα του αρχικού προβλήματος, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας επί 2,3,4...κλπ, τότε πώς μεταβάλλεται η πιθανότητα (π);

Εφαρμόζοντας τον τύπο της διωνυμικής κατανομής του Παραρτήματος 2.7, δείτε στον πίνακα που ακολουθεί, ποια είναι η πιθανότητα σε κάθε περίπτωση αριθμού ρίψεων να συμβεί **ακριβώς και μόνο** ο αντίστοιχος αριθμός κεφαλιών:

αρ. ρίψεων	αρ. κεφαλιών	πιθανότητα
5	4	15,625%
10	8	4,395%
15	12	1,389%
20	16	0,462%
25	20	0,158%
30	24	0,055%
35	28	0,020%
40	32	0,007%
45	36	0,003%
50	40	0,001%
55	44	0,000%
60	48	0,000%